



Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Appunti di Fisica I

per il Corso di Laurea Triennale in Chimica

Prof. G. Carboni

Edizione V.1 - 25 Gennaio 2011

Indice

I	Grandezze Fisiche e Misure	3
II	Cinematica	17
III	Dinamica del punto materiale	28
IV	Trasformazioni di riferimento	46
V	Lavoro ed Energia	50
VI	Moto oscillatorio	62
VII	Dinamica dei sistemi di punti	68
VIII	Urti fra particelle	73
IX	Momento angolare	79
X	Dinamica dei corpi rigidi	84
XI	Rotolamento	92
XII	Statica	96
XIII	Dinamica dei fluidi	98

Capitolo I

Grandezze Fisiche e Misure

1 Grandezze fisiche La Fisica è una scienza che studia i fenomeni naturali applicando il *metodo sperimentale*. Il cuore di questo metodo consiste nell'individuare le grandezze che possono individuare in maniera completa il fenomeno stesso e assicurarne quindi una descrizione il più possibile oggettiva e quantitativa.

Prendendo come esempio la caduta di un oggetto pensiamo naturalmente alla sua posizione che varia nel tempo e intuitivamente siamo portati a mettere in relazione la posizione nello spazio con il tempo che trascorre. Posizione e tempo sono un esempio di grandezze fisiche. La misura di queste grandezze richiede in generale degli appositi strumenti: in questo caso il minimo è un metro per la misura della posizione e un orologio per la misura del tempo.

2 Dimensioni Nella Fisica che studieremo in questo corso, avremo a che fare con tre differenti tipi di grandezze fondamentali, a ciascuna delle quali associamo una *dimensione* che viene indicata fra parentesi quadre:

1. lunghezze, $[L]$
2. tempi, $[T]$
3. masse, $[M]$

3 Unità di misura Ciascuno di questi tipi di grandezza richiede un differente tipo di strumento per la misura: il metro per le lunghezze, l'orologio per i tempi e la bilancia per le masse. Per ogni grandezza fondamentale esiste un *campione* e l'unità di misura è riferita al campione. Nel sistema internazionale (SI) le unità di misura sono

- per le lunghezze il metro (m)
- per i tempi il secondo (s)
- per le masse il chilogrammo (kg)

Il sistema cgs utilizza invece il centimetro (cm) e il grammo (g) per le lunghezze e le masse. Il centimetro è la centesima parte del metro e il grammo la millesima parte del chilogrammo.

4 Grandezze derivate Un'area si misura in metri quadri (m^2) e le sue dimensioni sono $[L]^2$. Il volume in metri cubi (m^3) e le sue dimensioni sono $[L]^3$. La densità si misura in kg/m^3 e le sue dimensioni sono $[M][L]^{-3}$. E' importante ricordare che si possono paragonare, sommare e sottrarre solo grandezze della stessa dimensione (omologhe). Il controllo dimensionale di una formula è fondamentale per evitare errori.

Vi sono altre unità di uso corrente. Per esempio il volume si misura anche in litri. 1 litro = $0.001 m^3$. Ma le sue dimensioni sono naturalmente sempre $[L]^3$.

I rapporti di grandezze omologhe non hanno dimensioni e sono semplici numeri.

Gli argomenti delle funzioni trigonometriche, logaritmi, esponenziali devono sempre essere numeri. Non ha senso calcolare il seno di una lunghezza o di una massa.

5 Multipli e sottomultipli

- centi (10^{-2}), abbreviato con c: cm
- milli (10^{-3}), abbreviato con m: mm, mg, ms
- kilo (10^3), abbreviato con k: km, kg
- micro (10^{-6}), abbreviato con μ : μm , μs
- mega (10^6), abbreviato con M
- nano (10^{-9}), abbreviato con n: nm, ns
- giga (10^9), abbreviato con G
- pico (10^{-12}), abbreviato con p: ps
- tera (10^{12}), abbreviato con T

Accanto a questi multipli e sottomultipli ne esistono molti altri di uso corrente: il minuto (60 s), l'ora (60 min=3600 s), la tonnellata (1000 kg, usata al posto del Mg), ecc.

6 Leggi fisiche Quando la fisica studia un fenomeno essa si propone di ottenere delle leggi a partire dalla misura delle grandezze fisiche che lo descrivono. Queste leggi servono poi a predire come avverranno dei fenomeni simili. La procedura per ottenere una legge è grosso modo la seguente. Restando sull'esempio della caduta dei corpi, studiandone la caduta da varie altezze misurando i *dati sperimentali*, si passa a scrivere una *formula* che descrive bene tutte le cadute osservate, permettendoci di sapere quanto tempo il corpo impiega per cadere da una determinata altezza. Tuttavia la formula a questo punto di per sè non ha alcuna utilità pratica dato che noi abbiamo già misurato i tempi di caduta dalle varie altezze e quindi li conosciamo in partenza senza bisogno della formula. Il passo successivo è di promuovere la nostra formula a *legge fisica*, ossia di ipotizzare che abbia valore anche per tutte le cadute da altezze che non abbiamo misurato.

Evidentemente questa ipotesi deve essere verificata. Dovremo quindi andare a vedere se compiendo successive misure essa rimane valida, ossia se c'è accordo fra i nuovi valori delle grandezze misurate e quelli predetti dalla formula. Se l'accordo non esiste la legge non è valida e la nostra formula non avrà lo *status* di legge fisica. Questo in genere non inficia le misure precedenti e la validità della formula, che però rimane applicabile solo a un sottoinsieme del fenomeno. Diciamo "in genere" dato che qualche volta capita che ripetendo una misura si scopra che sono stati fatti degli sbagli nelle misure precedenti.

Si vede subito che non è mai possibile pretendere che una legge fisica sia esatta dato che una sola misura potrebbe invalidarla. Si vede anche intuitivamente che possiamo definire una legge tanto più "solida" quanto è maggiore il numero di verifiche a cui è stata sottoposta con successo. Occorre anche dire che questa procedura, nata con la Fisica, è da tempo alla base di qualunque scienza quantitativa, naturale e non.

Se un esperimento è in contraddizione con una legge fisica consolidata, prima di gridare alla scoperta è doverosa un'accurata verifica dei dati raccolti e della procedura di misura seguita. Nonostante il pubblico sia portato a pensare l'opposto, il fisico è molto spesso più interessato a smontare una legge o una teoria fisica che alla "conservazione" della stessa. Ma spessissimo quella che si pensa essere la scoperta dei limiti di validità di una legge è solo un

errore sperimentale. Ci sono molti esempi recenti di questo fatto (ricordate per esempio la “Fusione fredda”?)

7 Accuratezza di misura Da quel che si è detto sopra l’accuratezza delle misure sperimentali è d’importanza capitale in Fisica. Si capisce intuitivamente che da un lato una grande accuratezza permetterà delle predizioni più precise; se poi fossimo in dubbio quale fra differenti leggi fisiche meglio descrive un certo fenomeno, quanto migliore sarà l’accuratezza delle misure, tanto più facile sarà la scelta. Purtroppo tuttavia sappiamo dalla nostra esperienza che ogni misura è affetta da incertezze ed errori che la rendono inaccurata.

E’ importante quindi dare una definizione quantitativa dell’incertezza allo scopo, ed esempio, di paragonare la bontà di due diverse misure, per poter cercare di minimizzarla con un’adeguata procedura sperimentale e anche per sviluppare migliori strumenti.

8 Importanza degli strumenti Se vogliamo misurare la lunghezza di un oggetto o la distanza fra due punti non troppo lontani e non troppo vicini utilizzeremo un metro. Un comune metro da sarto ha graduazioni ogni $\frac{1}{2}$ centimetro (Fig. 1). Sarà difficile misurare qualcosa con una precisione migliore di $\frac{1}{2}$ cm a meno che, ed esempio, l’oggetto da misurare non corrisponda esattamente a una tacca del metro. Anche in questo caso può sorgere il dubbio che il metro da sarto possa cambiare di lunghezza se viene più o meno teso. Chiaramente il metro a nastro metallico mostrato nella stessa figura sembra di migliore accuratezza dato che ha graduazioni ogni millimetro ed è meno deformabile del metro da sarto.



Fig. 1

Se vogliamo una precisione migliore del mm occorre uno strumento come il calibro (Fig. 2) con il quale possiamo misurare le frazioni del mm. Il calibro tuttavia ha la limitazione che si adatta a misurare solo oggetti piccoli, come appunto le monete.

E’ quindi importante tenere a mente che la prima regola è di scegliere lo strumento adatto.

9 Errori di misura Introduciamo a questo punto l’*errore di misura*, che è semplicemente la differenza fra il *valore vero* di una grandezza e il *valore misurato*. Questa grandezza non può essere conosciuta nel senso usuale del termine, dato che occorrerebbe sapere il valore vero, ma questo è ignoto. L’errore può quindi essere solo stimato, e uno dei punti fondamentali della cosiddetta *teoria degli errori* sta appunto nell’ottenere tale stima.

Indicheremo con δx l’errore sulla grandezza x . Per esplicitare brevemente sia il valore misurato x_0 che l’errore, scriveremo

$$x_0 \pm \delta x$$



Fig. 2

Il significato di questa notazione è che il valore vero della grandezza x è compreso nell'intervallo

$$\underbrace{x_0 - \delta x < x < x_0 + \delta x}_{\text{intervallo di confidenza}}$$

con “ragionevole certezza”. Una certezza ragionevole può significare ad esempio il 95%. E' naturale che ingrandire l'intervallo significa anche aumentare la certezza che il valore vero cadrà al suo interno. Tuttavia un intervallo eccessivamente grande non dà una buona informazione.

10 Errore relativo Dividendo l'errore (preso positivo) per il modulo della grandezza misurata abbiamo l'errore relativo. Consideriamo ad esempio

$$x = 9.81 \pm 0.3 \quad y = -3.14 \pm 0.5$$

Gli errori relativi sono

$$\frac{\delta x}{|x|} = 0.03 = 3\%$$

$$\frac{\delta y}{|y|} = 0.16 = 16\%$$

L'errore relativo permette di paragonare la qualità delle misure di grandezze differenti. Invece di dare l'errore relativo in percento, nel caso di misure di alta precisione si usa darlo in *ppm*: parti per milione. Per esempio il numero di Avogadro è noto con una precisione relativa di 0.6 ppm. La massa dell'elettrone con 0.3 ppm. La costante di gravitazione con solo il 0.013 %.

Per molti scopi correnti, una misura con precisione relativa dell'1 % è da considerarsi buona.

11 Cifre significative E' chiaro che non ha molto significato scrivere

$$(1) \quad m = 12.245 \pm 0.3 \quad \text{kg}$$

Essendo l'errore stimato di 0.3 kg, le cifre significative per la massa sono in numero eccessivo. Infatti esse specificano il valore della massa fino al grammo mentre l'errore è di ben 300 grammi. E' quindi più corretto scrivere 12.2 ± 0.3 kg, o al massimo 12.24 ± 0.30 kg. Per lo stesso motivo non ha senso scrivere un errore con più di due cifre significative.

12 Misure consistenti e non Supponiamo di avere due misure distinte della stessa grandezza

$$40 \pm 5$$

$$42 \pm 8$$

Dato che i due intervalli di confidenza si sovrappongono, il valore vero può essere contenuto in entrambi e quindi diciamo che non vi è discrepanza fra le due misure. Viceversa

$$35 \pm 3$$

$$44 \pm 2$$

sono inconsistenti. In tal caso almeno una delle due misure è sbagliata oppure gli errori sono stati sottostimati.

13 Tipi di errori Dividiamo gli errori di misura in *casuali* o *statistici* e *sistematici*.

14 Errori casuali o statistici Immaginiamo di far ripetere la stessa misura di lunghezza con lo stesso strumento a dieci sperimentatori distinti, chiedendo a ciascuno di darne la sua migliore stima. Avremo dieci valori che non saranno tutti uguali. La diversità traduce il fatto che ciascuno ha commesso un errore differente nello stimare la lunghezza. Se facciamo ripetere la misura troveremo che spesso lo stesso sperimentatore non ritroverà il valore precedente: gli errori sono casuali. A volte si troverà un valore inferiore a quello vero, a volte superiore: gli errori possono quindi essere positivi o negativi. Il valore medio degli errori casuali su un numero N molto grande di misure sarà quindi zero:

$$(2) \quad \overline{\delta x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i = 0 \quad N \text{ molto grande}$$

15 Errori sistematici Abbiamo un errore sistematico tutte le volte che misuriamo qualcosa con uno strumento di costruzione imprecisa o di funzionamento difettoso. Ad esempio, utilizzando un metro “lungo” le nostre misure saranno sistematicamente più piccole della realtà. Una bilancia difettosa fornirà pesi sistematicamente maggiori del vero. In altri casi sarà l’uso improprio dello strumento a falsare le misure. Ne consegue che se facciamo la media degli errori sistematici di molte misure N il risultato

$$\overline{\delta x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \neq 0$$

L’errore sistematico si riduce con una verifica accurata degli strumenti e delle tecniche di misura.

16 Un buon esempio per illustrare gli errori casuali e sistematici è mostrato nella Fig. 3 in cui vediamo i risultati di 20 tiri su un bersaglio. A sinistra, benché il tiratore mirasse esattamente al centro, errori casuali hanno reso il tiro impreciso. Si vede che i colpi si addensano verso il centro del bersaglio, ma tuttavia ne possiamo trovare anche alcuni piuttosto lontani dal centro.

La situazione è diversa nel disegno a destra. Ci rendiamo subito conto che i tiri sono sistematicamente spostati verso destra e verso l’alto. In questo caso il fucile o il mirino ha un

difetto di regolazione. Oltre a questo errore sistematico abbiamo gli errori casuali come prima, che provocano la dispersione dei colpi. La dispersione non è più attorno al centro ma attorno alla direzione “sbagliata” dovuta all’errore sistematico.

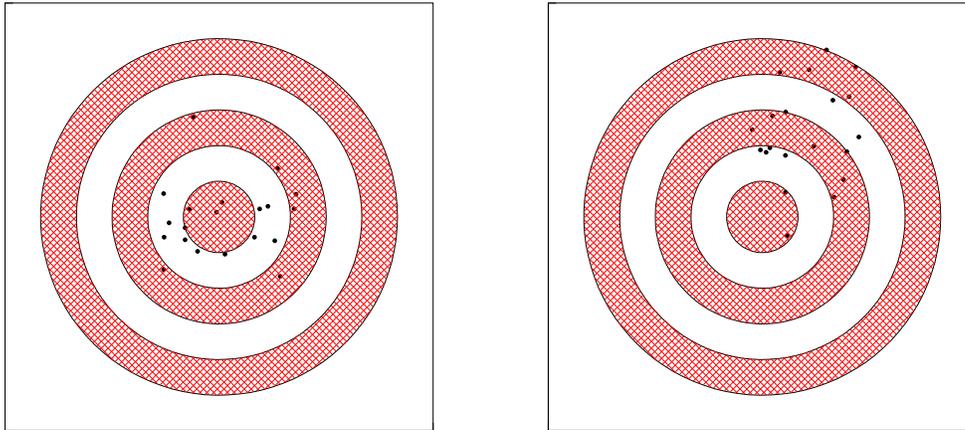


Fig. 3

17 Errori su somma e differenza di grandezze Supponiamo che la grandezza z sia la somma di due grandezze x e y . Chiamiamo δx e δy gli errori sui valori misurati x e y . Quale sarà l’errore su $z = x + y$?

Un caso estremo lo abbiamo quando le misure di X e Y assumono i valori $x + \delta x$ e $y + \delta y$. L’altro caso estremo si ha per $x - \delta x$ e $y - \delta y$. Si vede quindi che z è certamente compreso nell’intervallo $x + y \pm (\delta x + \delta y)$. Possiamo quindi dire che l’errore sulla somma è la somma degli errori.

Se consideriamo $z = x - y$ i casi estremi si hanno questa volta per $x + \delta x$ e $y - \delta y$ e per $x - \delta x$ e $y + \delta y$. Così anche per la differenza di due grandezze l’errore è sempre dato dalla somma degli errori.

18 Somma quadratica degli errori La regola di somma semplice degli errori è pessimistica se abbiamo a che fare con errori casuali. Una spiegazione intuitiva è che sarà poco probabile che le due misure abbiano fluttuato contemporaneamente dalla stessa parte. Si può dimostrare che la formula corretta è quella della *somma quadratica* degli errori:

$$\begin{aligned}
 \delta(x + y) &= \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \\
 \delta(x - y) &= \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \quad \text{e, in generale} \\
 \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_N) &= \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_N^2}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Per quanto possa sembrare paradossale, la somma quadratica porta a delle semplificazioni rispetto alla somma semplice. La somma quadratica degli errori è sempre inferiore alla somma semplice.

Per indicare la somma quadratica degli errori useremo la notazione seguente:

$$\delta z = \delta x \oplus \delta y \oplus \dots \oplus \delta w
 \tag{4}$$

19 Propagazione degli errori Supponiamo di misurare un tempo t ma di essere interessati a conoscere lo spazio s che si ottiene dal tempo attraverso la formula (f è una funzione nota):

$$(5) \quad s = f(t)$$

Come si ripercuote sullo spazio l'errore sul tempo?

Se invece di t misuriamo $t + \delta t$ avremo

$$(6) \quad \begin{aligned} s &= f(t) \\ s' &= f(t + \delta t) \quad \text{da cui l'errore} \\ \delta s &= s' - s = f(t + \delta t) - f(t) \end{aligned}$$

Possiamo quindi **sempre** usare la formula (6) per calcolare la propagazione dell'errore. Se vogliamo l'errore relativo basterà dividere per s .

20 La (6) si può mettere in una forma che in certi casi è più comoda immaginando che l'errore δt sia un infinitesimo. In tal caso sostituendo $\delta t \iff dt$ possiamo scrivere

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta s &= f(t + \delta t) - f(t) = \left(\frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} \right) dt = \\ &= f'(t) \delta t \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con f' la *derivata prima* di f .

Esempio:

$$(8) \quad \begin{aligned} s &= \frac{1}{2}gt^2 \\ \delta s &= gt \delta t \end{aligned}$$

21 Propagazione dell'errore relativo Per calcolare l'errore relativo, osserviamo che, ponendo $y = \ln x$,

$$(9) \quad \delta y = \delta(\ln x) = \frac{\delta x}{x}$$

per cui **l'errore relativo su una grandezza è uguale all'errore sul suo logaritmo**. Applicando la regola alla formula (8) (ricordiamo che $\ln t^2 = 2 \ln t$) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \ln s &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln g + 2 \ln t \\ \frac{\delta s}{s} &= \delta(\ln s) = 2\delta(\ln t) = 2\frac{\delta t}{t} \end{aligned}$$

come si poteva anche trovare per via indiretta calcolando il rapporto $\delta s/s$. Il "2" viene dal fatto che nella (8) il tempo compare alla 2^a potenza. E' quindi naturale che un dato errore relativo sul tempo si ripercuota in modo amplificato sullo spazio. Vale l'inverso: se avessimo misurato lo spazio per ottenere il tempo avremmo trovato

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta s}{s}$$

22 Funzioni di più variabili Se la grandezza da misurare y è ottenuta come funzione di più variabili misurate x_i , la regola dell'errore si generalizza nel modo seguente. Si fa variare ciascuna delle variabili del suo errore tenendo fisse tutte le altre. Matematicamente equivale a calcolare le *derivate parziali* rispetto a tutte le variabili ottenendo il contributo all'errore di y di ciascuna:

$$\delta y_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta x_i$$

Abbiamo quindi N errori su y che sono fra loro indipendenti. L'errore totale si ottiene sommando (in genere quadraticamente) gli errori parziali:

$$\delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1 \oplus \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \delta x_2 \oplus \dots \oplus \left| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right| \delta x_N$$

23 Casi particolari Spesso capita che y sia una funzione particolarmente semplice delle grandezze direttamente misurabili. Ad esempio una densità si ottiene facendo il rapporto di massa e volume: $\rho = M/V$. Applicando l'Eq. (9) abbiamo

$$\begin{aligned} \ln \rho &= \ln M - \ln V \\ \frac{\delta \rho}{\rho} &= \frac{\delta M}{M} \oplus \frac{\delta V}{V} \end{aligned}$$

Quindi in questo caso l'errore relativo è semplicemente la somma (quadratica) degli errori relativi dovuti alle varie misure.

24 Distribuzione degli errori casuali Torniamo all'esempio del tiro al bersaglio, e riportiamo in un grafico gli errori osservati orizzontalmente lungo x in 20 tiri. Nella Fig. 4 in alto ogni errore è riportato con un tratto verticale. Vediamo che gli errori si addensano intorno allo zero. Il grafico di mezzo è un *istogramma*: l'intervallo di x è stato diviso in 20 segmenti (ciascuno è quindi largo 0.5) e sull'asse y riportiamo quante volte un errore è caduto all'interno di ogni segmento. Vediamo che per 6 volte gli errori sono fra -0.5 e 0, e per altre 6 volte fra 0 e 0.5, a conferma dell'addensamento attorno allo zero. Questo istogramma si chiama anche *distribuzione* degli errori.

Infine nel grafico in basso è riportata la distribuzione nel caso di 10000 tiri: l'istogramma ha una forma caratteristica e molto regolare, approssimato bene dalla funzione gaussiana tratteggiata. In effetti quasi tutti gli errori casuali seguono questa distribuzione. essa è caratterizzata da un valore medio (la posizione del picco) e dalla cosiddetta *deviazione standard*, indicata spesso con la lettera σ . Dato che l'errore medio della distribuzione è nullo (vedi Eq. (2)) esso non contiene informazioni utili. La deviazione standard, è la media dei quadrati degli errori. In questo modo tutti gli errori positivi o negativi contribuiscono nello stesso senso:

$$(10) \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i^2 \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

Se N non è molto grande la formula dà un risultato approssimato, ma comunque è assai utile per valutare l'entità degli errori in una serie di misure. Nella figura la distribuzione ha esattamente $\sigma = 1$, mentre se la calcoliamo sui primi 20 tiri troviamo $\sigma = 0.7628$. Con 10000 tiri l'approssimazione è ottima: $\sigma = 1.011$.

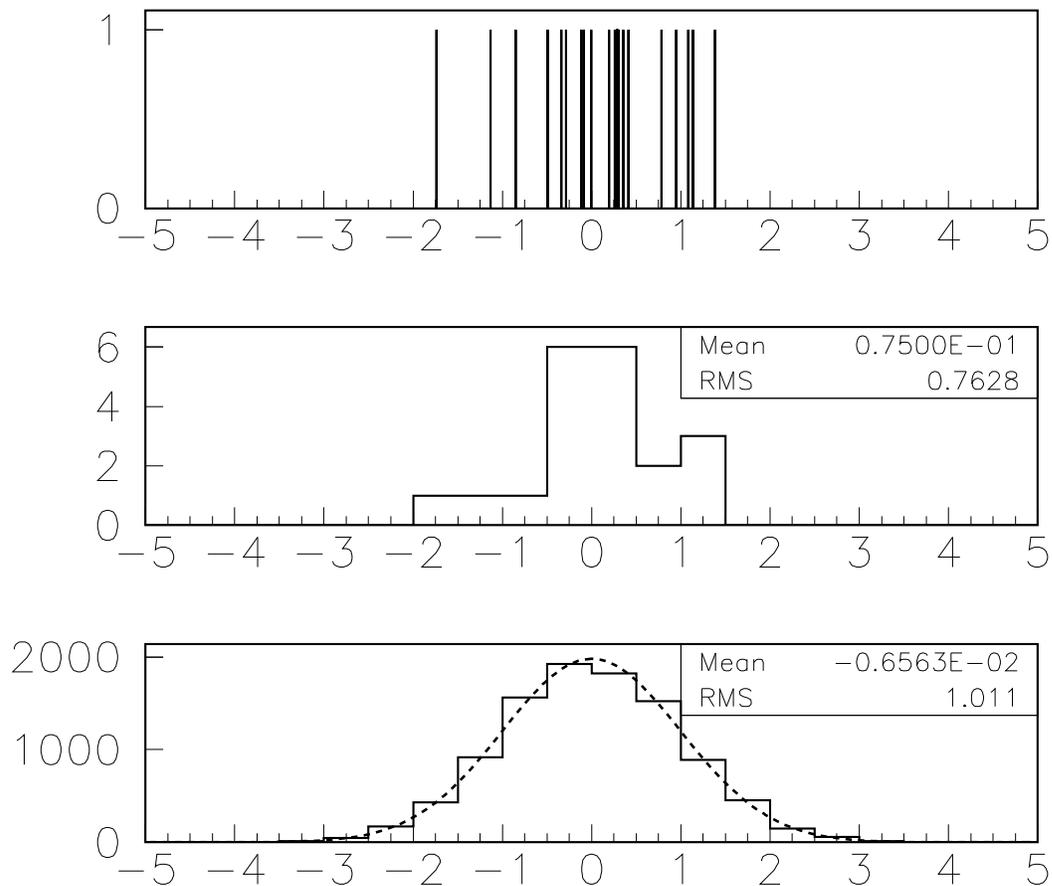


Fig. 4

25 Distribuzione normale degli errori La distribuzione normale degli errori (o distribuzione di Gauss) è mostrata in Fig. 5 per il caso di $\sigma = 1$. Per σ maggiori o minori di 1 la curva rispettivamente si allarga o si restringe, mantenendo però la stessa forma. Se sull'asse orizzontale riportiamo x/σ la distribuzione di Fig. 5 ha validità universale. L'area totale sotto la curva rappresenta il numero di misure (e quindi di errori), ed è normalizzata a 100. L'area della zona compresa tra -1 e 1 vale 68 ossia il 68 % del totale, mentre quella compresa fra -2 e 2 è il 95 %. Questo vuol dire che compiendo una misura abbiamo la probabilità del 68 % di compiere un errore inferiore a σ in valore assoluto, e quindi del 32 % di trovare un errore maggiore. La probabilità di trovare un errore inferiore in valore assoluto a 2σ è invece del 95 % e quella di fare un errore maggiore è il $100 - 95 = 5\%$. Le percentuali 68 % e 95 % corrispondono al *livello di confidenza* della misura. Si può costruire una tabellina che mette in corrispondenza l'intervallo di errore con il livello di confidenza:

intervallo $-\sigma, \sigma \rightarrow$ livello di confidenza 68%
 intervallo $-2\sigma, 2\sigma \rightarrow$ livello di confidenza 95%
 intervallo $-3\sigma, 3\sigma \rightarrow$ livello di confidenza 99.7%

Per chiarezza si dovrebbe citare sempre il livello di confidenza a cui un certo errore si riferisce. Scrivendo ad esempio che $x = 137 \pm 6$ con la confidenza del 95 % questo corrisponde a dire che $6 = 2\sigma$ e quindi $\sigma = 3$. La convenzione corrente è di dare come errore proprio σ , senza citare il livello di confidenza (che in tal caso è il 68%): si scriverà allora $x = 137 \pm 3$. E' chiaro che se conosciamo σ e gli errori sono normali (gaussiani) possiamo calcolarci sempre il livello di confidenza partendo dalla curva di Fig. 5 o usando apposite tabelle.

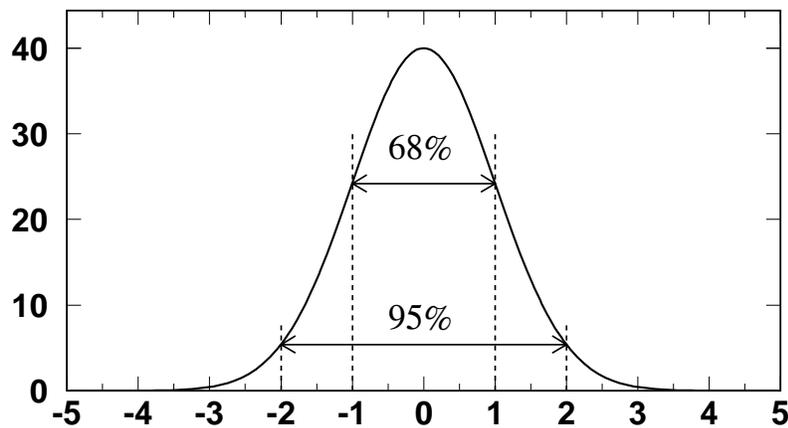


Fig. 5

26 Valor medio Si dimostra che, avendo effettuato N misure di una grandezza X e se queste sono affette da errori casuali, la migliore stima del valore vero si ottiene facendo la media:

$$(11) \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Da quale errore è affetto il valor medio? Applichiamo la regola della somma quadratica degli errori al valor medio. Teniamo conto del fatto che l'errore sarà verosimilmente uguale (δx) per tutte le misure per cui l'errore sulla somma sarà $\sum_{i=1}^N x_i$ sarà $\sqrt{N} \delta x$. Allora:

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \delta x && \text{o, spesso} \\ \delta \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma \end{aligned}$$

Si vede quindi che ripetendo la misura possiamo ridurre l'errore casuale a piacimento fino a renderlo trascurabile. A questo punto l'incertezza sarà dominata dagli errori sistematici.

27 Stimare l'errore dai dati Possiamo utilizzare la media quadratica (10) degli errori per stimare la deviazione standard se non è nota a priori o per fare una verifica. Tuttavia per calcolare gli errori occorrerebbe conoscere il valore vero della grandezza (che è ignoto). Assumiamo quindi di poter sostituire al valore vero il valor medio delle misure:

$$\delta x_i = x_i - x_{\text{vero}} \rightarrow x_i - \bar{x}$$

In tal caso si dimostra che la migliore stima di σ^2 è data da

$$(13) \quad \sigma^2 \simeq s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

dove notiamo che la media viene fatta non sulle N misure ma su $N - 1$. Se N è abbastanza grande la differenza non è importante.

28 Misure di conteggio Nei casi precedenti abbiamo considerato che la grandezza misurata fosse una variabile *continua*, magari limitata a un certo intervallo ma che entro questo potesse assumere qualsiasi valore. Vi sono delle grandezze che assumono invece valori *discreti*. Un esempio è il lancio di un dado, o di una moneta. Nel primo caso vi sono 6 possibili risultati, nel secondo solo 2. Un altro esempio è il conteggio di quante volte si verifica una determinata situazione in un certo tempo: per esempio il numero di studenti che si laureano nell'anno è una variabile discreta.

Non vi è errore nell'osservazione dei lanci di una moneta o di un dado (a meno che uno non sia molto miope o molto distratto). Quindi un "2" è un "2" e "testa" è realmente "testa". Allora dove si nascondono le incertezze in questi tipi di esperimenti? Prima bisogna domandarsi cosa misurano gli esperimenti di conteggio.

In esperimenti di conteggio come questi, l'incognita è la probabilità che un certo fenomeno avvenga. Ad esempio si può voler verificare se abbiamo a che fare con una moneta "onesta", ossia una in cui la probabilità di fare croce sia la stessa di fare testa. Oppure vogliamo sapere qual è la probabilità che in un certo anno accademico uno studente si laurei e magari vedere se l'anno dopo la situazione è migliore o peggiore.

Come si calcola la probabilità di avere un determinato risultato (evento)? Come si calcola il livello di confidenza in tali casi? Faremo due esempi importanti:

- la distribuzione di Bernoulli
- la distribuzione di Poisson

29 Distribuzione di Bernoulli Questa distribuzione si applica ai casi, come il lancio di una moneta, in cui ci sono due risultati possibili: li chiameremo convenzionalmente testa e croce. E' importante che un risultato non debba influenzare il successivo: come si dice, *il caso non ha memoria*.

Se p è la probabilità di avere testa dopo un lancio, ci aspettiamo che dopo N lanci otterremo

$$\begin{aligned} T &= pN && \text{teste} \\ C &= (1-p)N && \text{croci} \end{aligned}$$

Se $N = 20$ e $p = 0,5$ ci attendiamo quindi 10 teste e 10 croci. Tuttavia non ci stupiremmo di ottenere 12 teste e 8 croci. Ci domandiamo più in generale qual è la probabilità di ottenere un determinato numero di teste dopo N lanci.

La risposta è la distribuzione di probabilità di Bernoulli che è mostrata in fig. 6 per il caso citato. Come si vede è massima per $n = 10$.

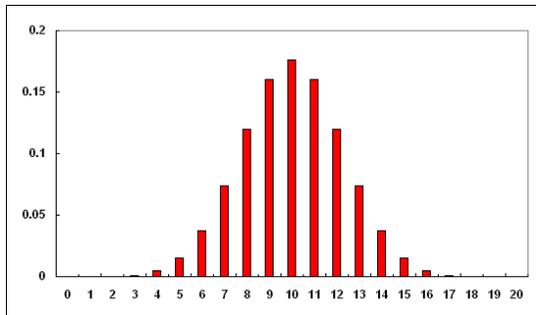


Fig. 6

mo dichiarato difettosa una moneta con $p = 0,55$ dato che probabilmente avrebbe dato 11 teste.

Se il numero di lanci è 2000 (100 volte superiore) otteniamo $\sigma = 22.4$. In tal caso non dovremmo stupirci se osserveremo 980 teste e 1020 croci. Vediamo però che mentre con 20 lanci potevamo ignorare uno scarto relativo di $2.24/20 = 0,11 = 11\%$ con 2000 lanci siamo scesi allo 1,1%. Siamo quindi assai meno tolleranti rispetto alle monete difettose dato che una moneta con $p = 0,55$ avrebbe dato luogo probabilmente a 1100 teste. Vediamo quindi che al crescere dei lanci la distribuzione si stringe sempre di più attorno ai valori più probabili. E' questa la *legge dei grandi numeri*.

30 Elezioni 2006 Per fare un esempio preso dalla politica recente, immaginiamo per ipotesi che nelle elezioni del 2006 gli elettori (circa 36 Milioni) abbiano votato lanciando in aria una moneta. In tal caso entrambe le coalizioni avrebbero preso circa lo stesso numero di voti, cosa che è effettivamente avvenuta. Tuttavia in questo caso $\sigma = 3000$ voti e quindi lo scarto osservato di 12500 voti da una parte (e dall'altra, ossia 25000 di differenza fra i due schieramenti) è ben maggiore (oltre 4σ) di quello che ci si aspetterebbe per un voto casuale equiprobabile.

31 Distribuzione di Poisson Se $p \ll 1$ ma N è molto grande in modo che il numero di conteggi attesi $\mu = pN$ sia finito la probabilità di osservare n conteggi segue la *distribuzione di Poisson*. Non è necessario che μ sia un numero intero (pensiamo al numero medio osservato in un certo tempo). Essendo $p \ll 1$ diciamo che questa distribuzione si applica a eventi "rari". Per esempio, la probabilità che un aereo in volo abbia un incidente è molto bassa, ma il numero dei voli è altissimo: pertanto il numero medio per anno è un numero finito.

La distribuzione di Poisson ci fornisce la probabilità che in un certo esperimento si osservino n conteggi (eventi) (n è un numero intero maggiore o uguale a zero) se il valore atteso è μ :

$$(14) \quad P_n = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

Viene fuori dai calcoli che se il numero di lanci N è abbastanza grande la distribuzione di Bernoulli è molto simile alla distribuzione di Gauss con deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)N}$$

Questo si vede chiaramente dalla figura. Applicando la formula troviamo $\sigma = \sqrt{5} = 2.24$. Non c'è da stupirsi se quindi invece di 10 troveremo 12 o 8 perché entrambi i valori sono contenuti nell'intervallo di confidenza $(10 - \sigma < n < 10 + \sigma)$. E' anche chiaro che presumibilmente non avremo

dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ si chiama n fattoriale:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 && \text{(per definizione)} \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ \dots & \\ 10! &= 3.6288 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

La probabilità che, ad esempio, non si verifichi nessun evento vale

$$P_0 = e^{-\mu} \frac{\mu^0}{0!} = e^{-\mu} \quad (0! = 1, \mu^0 = 1)$$

Se $\mu \gg 1$ vediamo che la probabilità di avere zero eventi è molto bassa, come c'era da aspettarsi. Viceversa se $\mu \simeq 0 \rightarrow P_0 \simeq 1$.

Una caratteristica importante è che per la distribuzione di Poisson

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

Anche la distribuzione di Poisson tende a una gaussiana se μ è grande. Già per $\mu = 5$ l'approssimazione è buona.

32 Viaggi aerei In fig. 7 vediamo il numero di incidenti fatali in tutto il mondo nei 10 anni 1996-2005. Prendendo la media sui 10 anni possiamo dire che $\mu = 17$ incidenti/anno mentre $\sigma = \sqrt{17} \approx 4$.

Applicando la distribuzione di Poisson possiamo per esempio calcolarci quale sia la probabilità che in un anno non avvenga alcun incidente: $P_0 = e^{-17} = 4.14 \cdot 10^{-8}$ e in effetti nell'arco di tempo 1996-2005 questa situazione non si è mai verificata.

Essendo $\mu = 17$ la distribuzione è a tutti gli effetti una gaussiana con $\sigma = 4$. Possiamo dire quindi che ogni anno ci potremmo aspettare fra 13 e 21 incidenti (68 % di livello di confidenza) oppure fra 9 e 25 (95 % di livello di confidenza). La quasi certezza (99 %) è che gli incidenti saranno almeno 5 e al massimo 29. D'altra parte il fatto che nel 2003 siano avvenuti solo 7 incidenti può far sospettare che la distribuzione non sia esattamente poissoniana, magari perché la sicurezza del trasporto sta progressivamente migliorando (2005 a parte!)

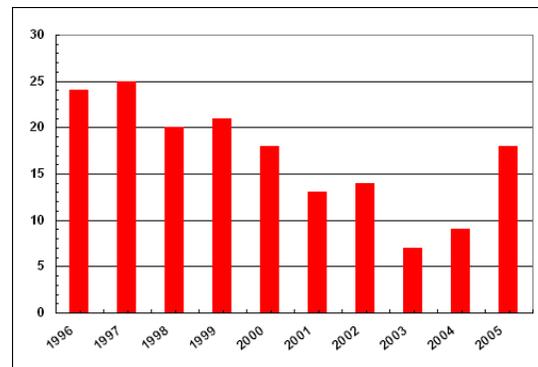


Fig. 7

33 Calcolo Le calcolatrici scientifiche e i fogli di calcolo come Microsoft EXCEL o WORKS permettono di calcolare rapidamente valori medi e deviazioni standard (Fig. 8). Spesso hanno anche funzioni più sofisticate che permettono di verificare, ad esempio, se due variabili sono fra loro legate.

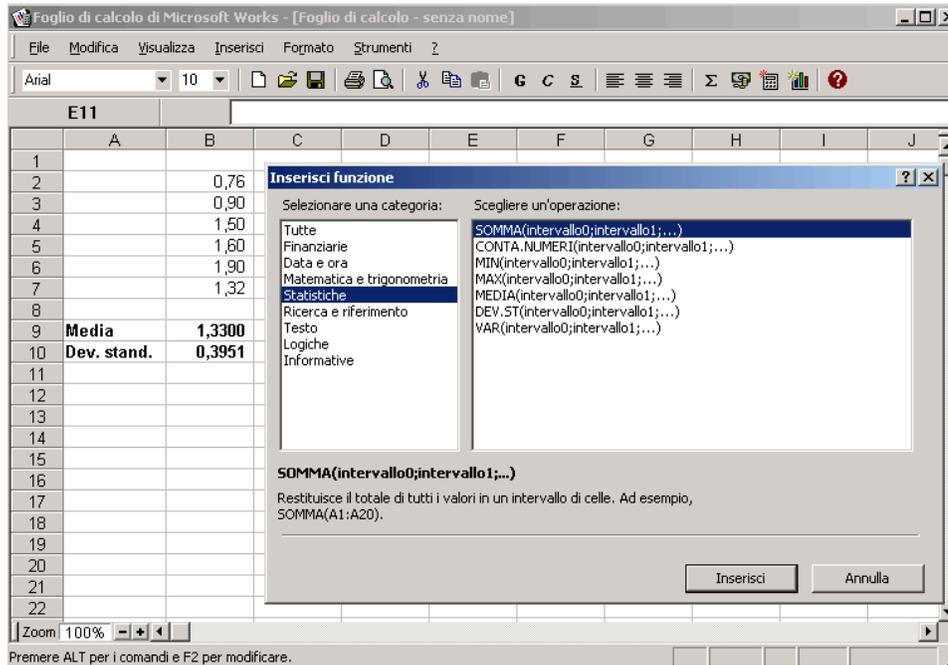


Fig. 8

Capitolo II

Cinematica

34 La cinematica è quella branca della meccanica che studia il movimento dei corpi senza domandarsi quali sono le cause che lo producono. Nella cinematica vengono definite le variabili necessarie per descrivere il moto dei corpi.

35 Sistema di riferimento Per descrivere il moto occorre servirsi di un *sistema di riferimento*. Un sistema di riferimento è costituito da un insieme di corpi, fissi relativamente l'uno all'altro, rispetto ai quali definiamo la posizione del corpo studiato e il suo movimento. Un esempio semplice potrebbe essere la stanza nella quale ci troviamo. In tal caso la posizione del corpo che studiamo può essere definita misurandone le distanze dalle pareti.

36 La scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria. Una mosca che vola all'interno di un vagone ferroviario in movimento può essere studiata sia rispetto a un riferimento solidale con lo scompartimento del vagone sia rispetto a un riferimento fisso rispetto al suolo. Tuttavia spesso la scelta di un determinato sistema permette delle notevoli semplificazioni nella soluzione di un problema.

37 Sistema di coordinate Il sistema di coordinate viene utilizzato per permettere la descrizione matematica del movimento rispetto al sistema di riferimento. In pratica il sistema di coordinate può essere pensato come *ancorato* al sistema di riferimento. È importante non confondere il sistema di coordinate con il sistema di riferimento, anche se a volte perfino i libri di testo confondono le due cose. Mentre il sistema di riferimento è qualcosa di fisico, il sistema di coordinate è qualcosa di geometrico. Possiamo sempre scegliere fra infiniti sistemi di coordinate quello che meglio si presta alla descrizione del problema.

38 Sistema di coordinate cartesiane ortogonali Un sistema di coordinate molto usato è quello *cartesiano ortogonale*. Sempre allo scopo di ribadire la differenza fra sistema di coordinate e sistema di riferimento, notiamo che nell'esempio della mosca sul treno possiamo usare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali sia (a) nel sistema di riferimento solidale col vagone che (b) nel sistema di riferimento solidale col suolo. Nel caso (a) gli assi possono essere gli spigoli delle pareti dello scompartimento, nel caso (b) gli spigoli delle pareti della sala d'aspetto nella stazione più vicina.

39 Unità di misura Le lunghezze (dimensioni $[L]$) si misurano in metri (m) nel sistema MKS, in centimetri (cm) nel sistema cgs. $1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$. Gli angoli non hanno dimensioni e si misurano generalmente in radianti (rad); i gradi si possono convertire in radianti tenendo presente che $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$.

40 Punto materiale o particella Descrivere il moto di un corpo di forma arbitraria può essere molto complicato. Il caso più semplice che può presentarsi è quello del cosiddetto *punto materiale*, per descrivere il quale sono sufficienti 3 coordinate cartesiane ortogonali per il moto nello spazio, mentre ne bastano 2 nel piano e 1 sola se il moto avviene lungo una retta. Nel seguito useremo anche il termine *particella* come sinonimo di punto materiale .

41 Traiettoria Un punto materiale muovendosi nello spazio occupa successivamente un'infinità di posizioni successive. Si chiama *traiettoria* il luogo dei punti occupati successivamente dal punto materiale nel suo moto. Si tratta in genere di una linea curva. Se la linea è chiusa il moto è limitato e il punto percorre continuamente la medesima traiettoria, come nel caso delle orbite planetarie.

42 Gradi di libertà Un punto materiale nello spazio può venire identificato da 3 coordinate cartesiane ortogonali. Il numero di coordinate indipendenti non cambia se usiamo coordinate polari o cilindriche o ellittiche o altre. Diciamo quindi che il punto materiale nello spazio ha 3 *gradi di libertà*. Analogamente i gradi di libertà sono 2 se il punto si muove nel piano ecc. *Il numero dei gradi di libertà non può essere modificato dalla scelta del sistema di coordinate.*

43 Moto a un solo grado di libertà Il moto ha un solo grado di libertà se la traiettoria è conosciuta a priori. Un esempio banale è il moto rettilineo. Infatti in tal caso fissata un'origine la posizione del punto può essere determinata in base alla distanza (col segno) rispetto all'origine. Questa distanza col segno prende anche il nome di *ascissa curvilinea* s . Parliamo anche in modo equivalente di moto a una dimensione.

44 Legge oraria Nel caso del moto a un grado di libertà la conoscenza dell'ascissa $s = s(t)$ in funzione del tempo ci dà in ogni istante t la posizione del punto materiale e prende il nome di *legge oraria* del moto.

Similmente a quanto fa un orario ferroviario, la legge oraria ci permette di conoscere il moto in maniera completa. La legge oraria può esser data in forma puramente numerica o di tabella che fa corrispondere s a t , e questa è la forma in genere in cui vengono riportati i risultati di una misura sperimentale. Oppure può venir data la funzione matematica $s(t)$, e in questa forma viene scritta la soluzione delle equazioni del moto se ammette una soluzione matematica semplice. Se la soluzione delle equazioni è molto complicata (in realtà questo avviene nella maggior parte dei casi pratici) allora $s(t)$ è il risultato di una soluzione *numerica* (in genere ottenuta al calcolatore) delle equazioni stesse.

45 Velocità media Consideriamo le posizioni del punto materiale a due istanti successivi $t_1 < t < t_2$. Chiamiamo *velocità media* il rapporto fra lo spostamento e il tempo impiegato a compierlo:

$$(15) \quad v_m(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La velocità ha un segno. Il modulo della velocità è il rapporto fra la distanza percorsa e il tempo impiegato.

46 Unità di misura La velocità ha dimensioni $[L][T]^{-1}$. L'unità di velocità nel sistema MKS è il metro al secondo che si abbrevia: m/s. Nel sistema cgs è il centimetro al secondo

che si abbrevia: cm/s. Altre unità di uso pratico, come il km all'ora (abbreviato km/h) possono ridursi all'unità MKS o cgs per semplici conversioni (esempio: $1 \text{ km/h} = 1000 \text{ m/h} = (1000 \text{ m})/(3600 \text{ s}) = 0.27777\dots \text{ m/s}$).

47 Moto uniforme Se la velocità media non dipende dagli istanti t_1 e t_2 ed è costante

$$v_m(t_1, t_2) = u_0$$

in tempi uguali la particella percorre spazi uguali. La legge oraria ha la forma semplice

$$s(t) = s_0 + u_0 t$$

moto (rettilineo) uniforme

dove ricordiamo che s_0 rappresenta la condizione iniziale ossia la posizione della particella al tempo zero.

48 Due treni si incrociano La stazione di Marina e la stazione di Castello distano fra loro 22 km. Alle 12:15 un treno parte da Marina verso Castello e alle 12:30 un altro treno parte da Castello verso Marina. Il primo treno viaggia a $|V_1| = 20 \text{ km/h}$ mentre il secondo viaggia a $|V_2| = 35 \text{ km/h}$. Abbiamo utilizzato il modulo $| |$ ma le velocità hanno segno opposto. Ci domandiamo

1. a che ora si incrociano i treni?
2. dove si incrociano?

Cominciamo a fissare l'origine degli spazi nella stazione di Marina e fissiamo per Castello $s_c = +22 \text{ km}$. In questo modo $V_1 > 0$ e $V_2 < 0$. Dato che i due treni partono a istanti successivi **conviene prendere come origine il tempo maggiore dei due**, quando il treno 1 è già in movimento da $T = 15$ minuti e avrà percorso $V_1 T = 5 \text{ km}$. Il treno 1 alle 12:30 non è quindi ancora giunto a Castello, altrimenti l'incrocio avverrebbe in quella stazione.

Prendendo quindi le ore 12:30 come origine dei tempi l'equazione oraria del treno 1 sarà

$$s_1(t) = V_1 T + V_1 t = 5 \text{ km} + V_1 t \quad (V_1 = 20 \text{ km/h})$$

L'equazione oraria del treno 2 è

$$s_2(t) = s_c + V_2 t \quad (s_c = 22 \text{ km}, V_2 = -35 \text{ km/h})$$

Notiamo che, essendo $V_2 < 0$, il treno 2 si muove nella direzione verso l'origine e quindi la sua coordinata $s_2(t)$ giustamente diminuisce. L'incrocio avviene quando

$$s_1(t^*) = s_2(t^*)$$

condizione d'incrocio

Troviamo quindi il tempo t^* in cui avviene l'incrocio (notare che i tempi qui sono misurati in ore e le distanze in km)

$$t^* = \frac{s_c - V_1 T}{V_1 - V_2} = \frac{22 - 5}{20 - (-35)} = \frac{17}{55} = 0.31 \text{ h} = 19 \text{ min}$$

Tenendo conto che l'origine dei tempi è alle 12:30 l'incrocio avviene quindi alle 12:49.

Il luogo dell'incrocio si ottiene dall'equazione oraria di uno qualsiasi dei due treni:

$$s_1(t^*) = 5 + V_1 t^* = 5 + 20 \times 0.31 = 11.2 \text{ km}$$

è la distanza dalla stazione di Marina.

49 Moto vario - Velocità istantanea Possiamo definire una velocità anche se il moto non è uniforme (47), ossia se la legge oraria è descritta da una generica funzione del tempo $s(t)$? La risposta è chiaramente affermativa, ma in tal caso la velocità varia da un istante all'altro e parleremo di velocità *istantanea*.

Cominciamo a calcolarci la velocità media del punto su un intervallo di tempo Δt molto piccolo. Consideriamo che all'interno di questo intervallo di tempo il moto sia rettilineo uniforme. Allora la velocità fra gli istanti t e $t + \Delta t$ è:

$$v_m(t, t + \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Se Δt è infinitesimo v_m rappresenta la velocità media su un tratto infinitesimo del percorso, e al limite $\Delta t \rightarrow 0$ essa è la velocità del punto *nell'istante* t o *velocità istantanea*. Ma detto limite non è altro che la *derivata rispetto al tempo* della legge oraria. Per cui otteniamo il risultato che *la velocità del punto materiale a un istante dato è la derivata della legge oraria del moto in quello stesso istante*:

$$(16) \quad v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

50 Trovare lo spostamento conoscendo la velocità Abbiamo visto che, nota la legge oraria $s(t)$ di un moto è possibile per semplice derivazione ottenere la velocità istantanea $v(t)$. Con l'operazione inversa, *l'integrazione*, possiamo ottenere la legge oraria partendo dalla conoscenza della funzione $v(t)$:

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t') dt'$$

Come noto dall'analisi matematica, l'operazione di integrazione rende necessaria l'introduzione di una *costante di integrazione* s_0 . In questo caso la costante ha un preciso significato fisico: essa rappresenta il valore dell'ascissa s all'istante $t = 0$ che abbiamo preso come origine dei tempi (estremo inferiore dell'integrale) per studiare il moto. Se la velocità è costante ritroviamo le leggi orarie del moto rettilineo uniforme (47).

51 Se la velocità $v(t)$ è esprimibile tramite una funzione matematica che non può essere integrata analiticamente, si può sempre ottenere una soluzione tramite *l'integrazione grafica o numerica*.

52 Accelerazione media Se il moto è vario la velocità istantanea cambia nel tempo. Definiamo *accelerazione media* la variazione di velocità divisa per l'intervallo di tempo in cui è avvenuta:

$$(17) \quad a_m(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'accelerazione si misura in ms^{-2} .

Se l'accelerazione media è costante abbiamo il moto *uniformemente accelerato*. Questo si verifica se la legge oraria ha una dipendenza quadratica dal tempo:

$$s(t) = s_0 + u_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

moto uniformemente accelerato

Infatti derivandola una volta otteniamo per la velocità:

$$v(t) = u_0 + a_0 t$$

e per l'accelerazione media

$$a_m(t_1, t_2) = a_0$$

I corpi pesanti abbandonati a sè stessi si muovono di moto uniformemente accelerato, tutti indistintamente con la stessa accelerazione $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ diretta verso il basso.

53 Un'auto che frena Un'automobile che frena *decelera*. La decelerazione non è altro che un'accelerazione diretta in senso contrario alla velocità. Se l'accelerazione è uniforme l'auto farà quindi un moto uniformemente accelerato.

Chiamando V_0 la velocità iniziale dell'auto e $-a_0$ la sua accelerazione, e ammettendo che la frenata inizi al tempo $t = 0$ le equazioni del moto saranno

$$x = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$V = V_0 - a_0 t$$

dove x_0 è la posizione dell'auto nell'istante in cui inizia la frenata. Domande:

1. quanto tempo impiega l'auto a frenare?
2. quant'è lo spazio di frenata?

Per fissare le idee ammettiamo $V_0 = 100 \text{ km/h}$, $a_0 = 4 \text{ ms}^{-2}$ (il segno meno l'abbiamo già esplicitato nella legge oraria).

Prima di tutto, essendo l'accelerazione espressa nel SI, convertiamo V_0 in m/s: $V_0 = 27.8 \text{ m/s}$. Per trovare il tempo di frenata basta usare l'equazione per la velocità e trovare il tempo t^* per cui V si annulla. Risposta

$$t^* = \frac{V_0}{a_0} = \frac{27.8}{4} = 6.95 \text{ s}$$

Lo spazio percorso dall'auto è invece ottenuto dalla legge oraria al tempo t^* e sottraendo x_0 : $L = x(t^*) - x_0$. Troviamo quindi per lo spazio di frenata:

$$L = \frac{V_0^2}{2a_0} = 96.6 \text{ m}$$

54 La velocità in funzione dello spazio Nel moto uniformemente accelerato si può ottenere un'importante relazione fra lo spazio percorso e la velocità. Indichiamo con i, f i valori iniziali e finali delle grandezze:

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$v_f = v_i + a_0 t$$

Ricaviamo il tempo dalla seconda equazione $t = (v_f - v_i)/a_0$ sostituendolo nella prima:

$$\begin{aligned} x_f - x_i &= \frac{v_i(v_f - v_i)}{a_0} + \frac{(v_f - v_i)^2}{2a_0} = \\ &= \frac{1}{2a_0} (2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_i v_f) \implies \end{aligned}$$

$$(18) \quad 2a_0(x_f - x_i) = v_f^2 - v_i^2$$

Questa formula ci permette, ad esempio, di risolvere subito il problema dello spazio di frenata di (53). Basta sostituire $L = x_f - x_i$ e imporre $v_f = 0$ (arresto dell'auto).

La (18) è un caso particolare del *Teorema delle forze vive* che vedremo in seguito (153).

55 Accelerazione istantanea Se l'accelerazione media non è costante si definisce un'accelerazione istantanea. Analogamente a quanto è stato fatto per la velocità istantanea si trova che

$$(19) \quad a = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t)$$

L'accelerazione si può quindi definire come la *derivata prima rispetto al tempo* della velocità e come la *derivata seconda rispetto al tempo* della legge oraria.

56 Trovare la velocità conoscendo l'accelerazione Analogamente a quanto fatto in (50) possiamo ottenere la velocità istantanea $v(t)$ partendo dall'accelerazione:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt'$$

Come detto prima, l'operazione di integrazione rende necessaria l'introduzione di una *costante di integrazione* v_0 . Questa costante rappresenta il valore della velocità v all'istante $t = 0$ che abbiamo preso come origine dei tempi (estremo inferiore dell'integrale) per studiare il moto.

57 Esempi

58 Moto nello spazio Nel caso di moto nello spazio il punto materiale viene identificato da una *terna* di coordinate cartesiane ortogonali:

$$P \rightarrow (x, y, z)$$

Le coordinate (x, y, z) sono le componenti del *vettore posizione* \vec{r} . Se P indica il punto e O è l'origine possiamo anche usare la notazione \vec{OP} .

La freccia serve a ricordarci che ogni vettore è caratterizzato da una *direzione*. La sua lunghezza non è altro che la distanza fra l'origine O e P , ossia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e costituisce il *modulo* del vettore che si indica con $|\vec{r}|$ o anche semplicemente con r .

Il vettore ha una sua realtà autonoma rispetto al sistema di coordinate, per cui cercheremo in genere di basare i ragionamenti sul vettore stesso. A volte tuttavia può convenire riferirsi esplicitamente alle coordinate: in questo caso utilizzando i *versori* degli assi possiamo scrivere:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

59 Vettore spostamento Consideriamo ora non più il vettore posizione ma il vettore spostamento $\vec{\Delta r}$ dal punto P (\vec{r}) a un altro punto Q (\vec{r}'). Si usa indicare questo vettore a volte anche con la notazione \vec{PQ} : la sua direzione indica da che parte ci si deve spostare per andare da P a Q e il suo modulo è al solito la distanza fra questi due punti:

$$(20) \quad |\vec{PQ}| = |\vec{w}| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

Vale la relazione:

$$(21) \quad \begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} \\ \vec{\Delta r} &= \vec{r}' - \vec{r} \end{aligned}$$

60 Velocità nello spazio Nel caso a più dimensioni la velocità viene definita come il rapporto

$$(22) \quad \begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} && \text{(velocità media)} \\ \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} && \text{(velocità istantanea)} \end{aligned}$$

Quest'ultima è quindi la derivata rispetto al tempo del vettore posizione. In termini di componenti abbiamo

$$(23) \quad v_x = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad v_y = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad v_z = \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

61 Moto rettilineo uniforme in tre dimensioni La legge oraria più semplice è quella del moto rettilineo uniforme, che si scrive in coordinate cartesiane:

$$(24) \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t \end{aligned}$$

che non è altro che *l'equazione parametrica di una retta*.

Il vettore costante $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ rappresenta il raggio vettore della posizione del punto a $t = 0$. Le costanti v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} sono le componenti del vettore velocità \vec{v}_0 . Vettorialmente quindi la legge oraria si scrive come:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

62 Costruzione grafica della velocità Il vettore spostamento del punto da $\vec{r}(t)$ a $\vec{r}(t + \Delta t)$ corrisponde alla differenza di questi due vettori come mostrato nella figura 9. La velocità si ottiene dividendo lo spostamento per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$. La direzione di tale vettore è quindi tangente alla traiettoria. Introducendo il versore \vec{e}_T , la velocità si può scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{e}_T \dot{s} = \vec{e}_T v \\ v &= \dot{s} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

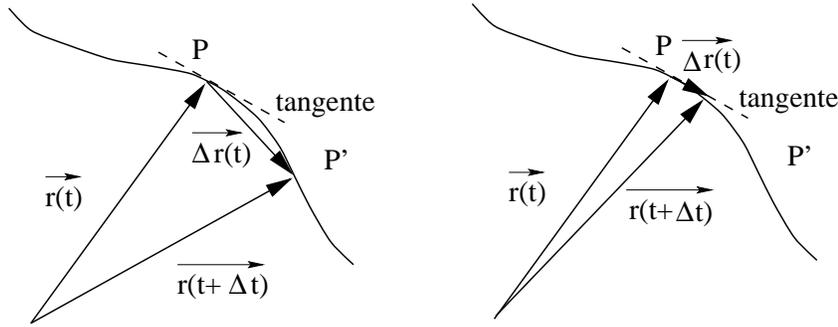


Fig. 9

63 Accelerazione nello spazio Se la velocità varia nel tempo abbiamo un'accelerazione. La variazione di velocità è il vettore differenza fra le velocità a due istanti successivi separati di Δt :

$$(25) \quad \Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$$

da cui, dividendo per Δt , otteniamo l'accelerazione:

$$(26) \quad \begin{aligned} \vec{a}_m &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} && \text{(accelerazione media)} \\ \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} && \text{(accelerazione istantanea)} \end{aligned}$$

Quest'ultima è quindi la derivata rispetto al tempo del vettore velocità e la derivata seconda del vettore posizione. In termini di componenti abbiamo

$$(27) \quad a_x = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t) \quad a_y = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t) \quad a_z = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)$$

64 Moto uniformemente accelerato nello spazio Questo tipo di moto si ha quando il vettore accelerazione è costante e quindi non varia né in direzione né in modulo. La velocità in questo moto è data da:

$$(28) \quad \vec{v}(t) = \vec{a}_0 + \vec{a}_0 t$$

Notiamo che questo tipo di moto può essere rettilineo solo se l'accelerazione è parallela alla velocità iniziale o se quest'ultima è zero. Altrimenti gli incrementi di velocità dovuti all'accelerazione a istanti successivi fanno deviare la traiettoria dalla direzione iniziale. Come vedremo nel capitolo seguente la traiettoria è una *parabola*.

La legge oraria è

$$(29) \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2$$

E' sempre possibile scegliere l'asse y nella direzione dell'accelerazione. Scegliamo poi l'asse z ortogonale a v_0 e a y in modo che la velocità iniziale sia contenuta nel piano x,y . Il moto rimarrà allora in questo piano (l'accelerazione non ha componenti ortogonali al piano)

il moto uniformemente accelerato si svolge nel piano che contiene
l'accelerazione e la velocità iniziale

In tal caso, scrivendo le (28) e (29) per componenti abbiamo che

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t & \dot{x} &= v_{0x} \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_0 t^2 & \dot{y} &= v_{0y} + a_0 t \end{aligned}$$

Possiamo quindi dire che il moto è la sovrapposizione di

1. un moto uniforme lungo x
2. un moto uniformemente accelerato lungo y (direzione dell'accelerazione)

65 Costruzione grafica dell'accelerazione Nel moto nello spazio e nel piano l'accelerazione corrisponde sia alla variazione del modulo della velocità che alla variazione di direzione. Tenendo conto che la velocità è tangente alla traiettoria ($\vec{v} = \vec{e}_T v$) e derivando rispetto al tempo possiamo quindi scrivere che:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_T v) = \vec{e}_T \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

In questa equazione il primo termine rappresenta il contributo dovuto alla variazione del mo-

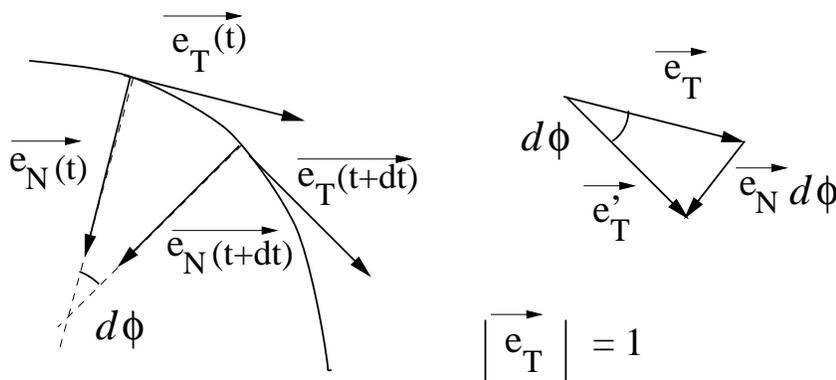


Fig. 10

dulo di v e prende il nome di *accelerazione tangenziale* mentre il secondo è proporzionale a quanto rapidamente la direzione della velocità cambia. Per calcolare il secondo termine consideriamo la figura 10, dove $d\vec{e}_T$ si ottiene sottraendo vettorialmente $\vec{e}_T(t)$ (nel punto P) da $\vec{e}_T(t+dt)$ (nel punto P'). Se conduciamo da P e P' le normali alla traiettoria queste si intersecano nel centro di curvatura della stessa formando fra loro un angolo $d\phi$. Il centro di curvatura non è altro che il centro di un cerchio di raggio R che *localmente* approssima la traiettoria. R si chiama *raggio di curvatura*. Allora è facile vedere che la differenza vettoriale dei versori è diretta verso il centro di curvatura e ha per modulo $d\phi$:

$$d\vec{e}_T = d\phi \vec{e}_N$$

dove abbiamo indicato con \vec{e}_N il versore normale alla traiettoria e orientato verso il centro di curvatura. Esplicitando il raggio di curvatura della traiettoria, R , pertanto potremo scrivere:

$$v \frac{d\vec{e}_T}{dt} = v \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_N = \frac{v}{R} R \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_N = \frac{v}{R} \frac{ds}{dt} \vec{e}_N = \frac{v^2}{R} \vec{e}_N$$

Questo termine dell'accelerazione, che è diretto verso il centro di curvatura, prende il nome di *accelerazione centripeta*. In definitiva l'accelerazione completa prende la forma:

$$(30) \quad \vec{a} = \vec{e}_T \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N$$

66 Moto circolare Nel moto circolare la traiettoria è un cerchio di raggio R . Per descrivere questo tipo di moto risulta conveniente usare le coordinate polari (nel piano del moto). Il vantaggio è che per descrivere il moto basta conoscere la legge oraria di variazione dell'angolo polare $\phi(t)$.

Sappiamo che la velocità è tangente alla circonferenza: $\vec{v} = \vec{e}_T \dot{s}$. Per calcolare \dot{s} osserviamo che l'arco di cerchio corrispondente a un angolo $d\phi$ vale $Rd\phi$. L'angolo dev'essere misurato in radianti (e infatti a 2π rad corrisponde la lunghezza della circonferenza, $2\pi R$). La velocità sarà quindi:

$$(31) \quad v = \dot{s} = R \frac{d\phi(t)}{dt} = R \omega(t)$$

dove $\omega(t)$ prende il nome di *velocità angolare* del punto materiale .

Se $\omega = \text{costante}$ allora parliamo di *moto circolare uniforme*. Abbiamo in tal caso un *moto periodico* che si ripete dopo il periodo $T = 2\pi/\omega$. Si chiama *frequenza* l'inverso del periodo: $\nu = 1/T$. La frequenza si misura in Hertz (Hz). $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.

La legge oraria del moto circolare si scrive per componenti nel modo seguente:

$$(32) \quad \begin{aligned} x(t) &= R \cos \theta(t) \\ y(t) &= R \sin \theta(t) \end{aligned}$$

ed è quindi determinata conoscendo la dipendenza dell'angolo dal tempo ($\theta = \theta(t)$).

Se il moto è uniforme l'angolo aumenta uniformemente col tempo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

moto circolare uniforme

67 La velocità nel moto circolare può esprimersi vettorialmente se introduciamo il *vettore velocità angolare* $\vec{\omega}$ che ha come direzione l'asse intorno la quale avviene la rotazione. Il verso è tale che una persona orientata come il vettore vede la rotazione avvenire in senso *antiorario*. La velocità prende quindi la forma:

$$(33) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Questa equazione rappresenta ad esempio la velocità dei punti appartenenti a una ruota che gira attorno a un asse fisso. Due punti opposti alla stessa distanza dall'asse hanno velocità di uguale modulo e di verso contrario.

68 Risulta istruttivo confrontare i risultati con quelli ottenuti usando le coordinate cartesiane (che prenderemo con l'origine nel centro del cerchio). Limitiamoci al caso del moto uniforme. Scriveremo perciò le leggi orarie $x(t), y(t)$ e da esse verificheremo che, prendendone le derivate, si ottengono la velocità **(66)** e l'accelerazione **(65)**.

Cominciamo a scrivere le componenti del vettore tangente e di quello normale al cerchio in una data posizione θ del punto materiale :

$$(34) \quad \vec{e}_T = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad \vec{e}_N = (-\cos \theta, -\sin \theta)$$

(per verificarlo calcolarsi $\vec{e}_N \cdot \vec{e}_T$).

Per calcolare velocità e accelerazione deriviamo la legge oraria (32). Occorre tenere presente che

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \theta(t)}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \cos \theta = \omega \cos \theta \\ \frac{d \cos \theta(t)}{dt} &= -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta = -\omega \sin \theta \end{aligned}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin \theta & a_x &= -\frac{v^2}{R} \cos \theta \\ v_y &= v \cos \theta & a_y &= -\frac{v^2}{R} \sin \theta \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la definizione $v = \omega R$. Usando le definizioni dei versori (34) troviamo subito che:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v(-\sin \theta, \cos \theta) = v \vec{e}_T \\ \vec{a} &= \frac{v^2}{R}(-\cos \theta, -\sin \theta) = \frac{v^2}{R} \vec{e}_N \end{aligned}$$

in accordo con la (30) come dovevasi dimostrare.

Capitolo III

Dinamica del punto materiale

69 La dinamica studia il movimento in relazione alle cause che lo producono. La dinamica è basata su tre principi, detti **principi fondamentali della dinamica**. Essi sono:

I. Il Principio d'inerzia

II. La Legge di Newton

III. Il Principio di azione e reazione.

70 Primo principio o principio d'inerzia Fu formulato da Galileo Galilei (1567–1642) estrapolando il risultato di prove sperimentali:

“un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme”, o anche:

“un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto (rettilineo uniforme) finchè non interviene una causa esterna a modificare tale stato”.

Se il corpo è in moto, cioè ha una velocità \vec{v} , questa rimane costante. Se è in quiete ($\vec{v} = 0$) rimane in quiete.

71 Un corpo, ad esempio, che cade non segue il principio d'inerzia in quanto lo vediamo muoversi con velocità crescente verso il basso. Attribuiamo tale comportamento al fatto che il corpo è soggetto a una forza che chiamiamo gravità.

72 Nello stesso modo, dev'essere necessariamente soggetto a forze un corpo che si muove di moto circolare (sia pure uniforme). Se la forza (detta centripeta) venisse a mancare il corpo inizierebbe a muoversi di moto rettilineo uniforme lungo la tangente alla circonferenza nella posizione in cui è cessata l'azione della forza.

73 Il primo principio non specifica cosa siano le “forze”. Intuitivamente ci aspettiamo che siano però connesse alla presenza di altri corpi estranei a quello di cui studiamo il moto: ad esempio la terra (che attrae verso di sé il corpo che cade) o il filo che tiene il corpo in rotazione lungo la circonferenza.

74 Le forze sono anche collegabili allo sforzo muscolare. È noto infatti che per mettere in movimento un qualsiasi oggetto dobbiamo esercitare un sforzo (fare “fatica”). È noto anche che esistono oggetti “leggeri” (per i quali facciamo poco sforzo) e “pesanti” (difficili da mettere in moto),

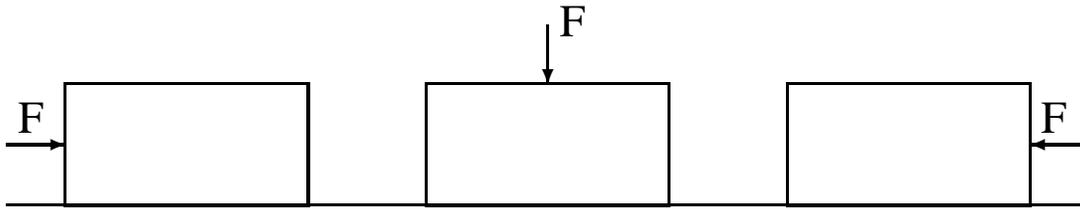


Fig. 11

75 Da Aristotele fino all'epoca di Galileo era comunemente accettato che per muovere a velocità costante un oggetto occorresse una forza costante. E che in mancanza di forza il moto venisse a cessare. Ciò è quello che osserviamo sulla base della nostra esperienza. Galileo intuì che l'arresto del moto non era dovuto a un'assenza di forze ma alla presenza di una forza di frenamento (come l'attrito). Il moto uniforme è possibile in quanto la forza motrice applicata al corpo controbilancia esattamente la forza resistente. In tale situazione il corpo, soggetto a due forze eguali e contrarie, è come se fosse libero e pertanto si muove di moto rettilineo uniforme. Se la forza motrice manca perchè smettiamo di spingere il corpo rimane pur sempre la forza resistente che ne provoca la diminuzione di velocità e quindi l'arresto.

76 Una forza può esercitarsi sia compiendo uno sforzo muscolare che tramite sistemi meccanici semplici, come le molle. Entrambi i tipi di forze citati per essere *efficienti* richiedono un *contatto* fra l'agente che esercita la forza e il corpo su cui essa agisce. Altre forze, come la gravità e le forze dell'elettromagnetismo, si trasmettono da un corpo a un altro senza che vi sia un contatto diretto, sono cioè "azioni a distanza".

77 Per meglio specificare una forza, vorremmo associarle una grandezza fisica che ne esprima sia l'*intensità* sia la *direzione*. Infatti una forza può avere effetti assai diversi in base alla direzione (vedi fig. 11). È naturale pensare a un *vettore* per caratterizzare la forza : \vec{F} .

78 Come abbiamo accennato prima, un concetto base è quello che le forze si possano *equilibrare* fra loro. Ad esempio, se io sto spingendo una cassa che scivola sul pavimento, una persona dall'altro lato spingendo in senso opposto al mio può provocare l'arresto della cassa. In tal caso stiamo applicando alla cassa due forze eguali e contrarie che si annullano (o si equilibrano). Per controbilanciare la forza da me applicata si è dovuta introdurre esplicitamente una seconda forza.

79 Meno evidente è il caso, ad esempio, di una cassa poggiata sul pavimento: essa non si muove (non cade attraverso il pavimento) pur essendo soggetta alla forza di gravità \vec{F}_G . L'apparente contraddizione è risolta ipotizzando che il piano *reagisca* con una forza $\vec{F}_N = -\vec{F}_G$ in modo che alla cassa risulta applicata la forza risultante $\vec{F}_N + \vec{F}_G = 0$.

Anche in questo caso quindi abbiamo una seconda forza in gioco. Questa forza fa parte di una categoria di forze dette *reazioni vincolari* che saranno esaminate più in dettaglio nel seguito.

80 Secondo principio o Legge di Newton Esso si formula così:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$$

dove m è una costante che si chiama *massa inerziale* ed è una caratteristica del corpo al quale la forza è applicata. \vec{a} è l'accelerazione del corpo. La legge di Newton ci dice quindi che

- la velocità di un corpo varia tanto più rapidamente quanto maggiore è la forza impressa;
- la variazione di velocità avviene sempre nella direzione della forza;
- se la forza è nulla non vi è variazione di velocità e quindi il moto è rettilineo e uniforme (**61**);

Mentre \vec{F} e \vec{a} sono due vettori, la massa è uno *scalare*, *additivo* che a parità di materiale è proporzionale al volume del corpo. Data una stessa \vec{F} , corpi di masse diverse assumono accelerazioni inversamente proporzionali alle rispettive masse.

Il nome *massa inerziale* è legato al fatto che la massa esprime l'*inerzia* del corpo, ossia la sua riluttanza a cambiare velocità (in modulo, direzione e verso).

81 Risultante delle forze Generalizzando quanto detto prima, se più forze sono applicate a un punto materiale, esso si muove come se ad esso fosse applicata un'unica forza detta *risultante*:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

In particolare, se $\vec{F}_R = 0$, il punto materiale si comporta come un punto isolato.

82 È molto importante notare il fatto, di per sé per nulla scontato, che nel calcolare la risultante possiamo sommare le forze senza preoccuparci se abbiano natura diversa. La forza peso può essere equilibrata, ed esempio, da una forza di tipo elettrico come avviene se una palla è appesa a una molla. La forza che tiene insieme gli atomi nel reticolo cristallino del metallo che costituisce la molla è una forza elettrica. La risultante di tutte le forze elettriche a livello atomico controbilancia la forza di gravità esercitata dalla Terra sulla palla.

83 Interpretazione La legge di Newton si può vedere da due punti di vista:

- come una definizione della forza, ed usarla per determinarne il valore misurando l'accelerazione a cui è soggetto un corpo di prova;
- la si può utilizzare come *equazione del moto* per determinare l'accelerazione una volta nota la forza, al fine di prevedere il moto di un corpo.

È chiaro anche che non si può usarla per le due cose allo stesso tempo, pena finire in un circolo vizioso!

84 Quantità di moto La grandezza *vettoriale*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

si chiama *quantità di moto* di un corpo. Se la massa è costante (come sarà quasi sempre in queste dispense) si può riscrivere la Legge di Newton (**80**) nella forma:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

cioè se $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{costante}$. Si dice anche che in tal caso la quantità di moto *si conserva*.

85 Unità di misura Sulle dimensioni dell'accelerazione abbiamo già detto ($[L][T]^{-2}$).

La massa è un'unità di tipo nuovo, e quindi ha una sua dimensione $[M]$. Nel sistema MKS si misura in chilogrammi (kg), mentre nel sistema cgs si misura in grammi (g). $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$.

Le dimensioni della forza sono definite tramite la legge di Newton: $[F] = [M][L][T]^{-2}$. L'unità di misura della forza è il Newton, N. Una massa di 1 kg che ha un'accelerazione di 1 m/s^2 è soggetta alla forza di 1 N. Nel sistema cgs l'unità di forza è la dyne (che produce l'accelerazione di 1 cm/s^2 applicandola su una massa di 1 grammo). Lasciamo allo studente da dimostrare che $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne}$.

86 Equazione del moto L'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$, nota \vec{F} , è sufficiente a determinare completamente il moto di un punto materiale in base alle condizioni iniziali $\vec{v}(t_0), \vec{r}(t_0)$. Il procedimento si chiama comunemente *integrazione dell'equazione del moto*. I casi in cui l'equazione del moto è integrabile per via analitica sono pochi, limitati a particolari tipi di forze. Nel caso generale si tratta di un'operazione assai complessa.

In certi casi una situazione complessa può ridursi a una semplice, in cui il moto è essenzialmente determinato da una forza preponderante, a cui si aggiunge l'effetto di forze "più complicate" ma più deboli. Si pensi ad esempio al moto della Luna, che è semplice per la parte dominata dalla forza Terra-Luna mentre l'effetto della forza Sole-Luna, più complicato da trattare, è modesto data la piccolezza di tale forza in rapporto alla prima. Questa tecnica di risoluzione dei problemi si chiama *metodo perturbativo* ed il procedimento è usatissimo in Fisica (e non solo nella Meccanica).

87 Forze costanti Chiariamo subito che, essendo le forze **vettori**, una forza costante dev'esserlo sia in modulo che in direzione. E' il caso più semplice da trattare, ma non per questo poco importante: la forza di gravità vicino alla superficie terrestre è infatti un esempio di forza costante. La sua direzione è quella del filo a piombo e la sua intensità è proporzionale alla massa del corpo.

88 Forza di gravità o forza peso Il fatto *sperimentale* (osservato per la prima volta da Galileo) che tutti i corpi soggetti alla forza di gravità *si muovono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa*, ci dice quindi che essi sono soggetti a forze *diverse*, e queste forze devono essere proporzionali alle loro masse:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{Grav}, 1} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_{\text{Grav}, 2} = m_2 \vec{a}_2 \end{array} \right\} \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{g} \quad (\text{dato sperimentale})$$

$$\vec{F}_{\text{Grav}, 1} = \frac{m_1}{m_2} \vec{F}_{\text{Grav}, 2} \quad (\text{conseguenza})$$

Detta \vec{g} l'accelerazione (uguale per tutti i corpi) la forza di gravità si scrive pertanto:

$$(35) \quad \vec{F}_{\text{Grav}} = m \vec{g}$$

La forza di gravità si chiama anche comunemente *forza peso*. In questo testo chiamiamo *corpo pesante* un corpo dotato di massa e soggetto alla forza peso.

89 Quanto vale la forza peso su una massa di 2 kg ? $F = 2 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 19.6 \text{ N}$.

90 Una volta si usava anche come unità (ma qualcuno, in particolare gli ingegneri, lo usa ancora) il kg-forza. 1 kg-forza è semplicemente la forza peso (sulla Terra) che si esercita su una massa di 1 kg. Pertanto esso equivale a 9.8 N. Oggi gli ingegneri usano spesso il *decanewton* o daN perché vale appunto circa un vecchio kg-forza. Il carico massimo per una gru viene dato in daN.

91 Moto con forze costanti Con forze costanti l'accelerazione è anch'essa costante o uniforme e quindi abbiamo a che fare con un moto uniformemente accelerato nello spazio che abbiamo studiato in (64). Tale è il moto dei corpi pesanti (o *gravi*) se possiamo trascurare le forze diverse dalla forza peso come per esempio quelle di attrito.

92 Importante Viceversa se un moto avviene con accelerazione costante potremo dire che è dovuto a una forza costante. Attenzione che quando parliamo di accelerazione **costante** la intendiamo costante come vettore e quindi in **costante in direzione e verso**. Se per esempio l'accelerazione è costante solo in modulo la forza non sarà costante.

93 Come abbiamo visto in (64) conviene scrivere la legge del moto in un sistema di coordinate in cui un asse è orientato nella direzione dell'accelerazione e quindi della forza. Ad esempio scegliamo l'asse y . Potremo poi scegliere l'asse z ortogonale a y e alla velocità iniziale, per cui il moto avverrà nel piano x, y .

$$(36) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= F \end{aligned} \quad \implies \quad a_0 = \frac{F}{m}$$

Il moto può essere pensato come la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo x e di un moto uniformemente accelerato lungo y . La soluzione dell'equazione del moto (36) è stata data in (64) e la riportiamo qui:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t & \dot{x} &= v_{0x} \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_0 t^2 & \dot{y} &= v_{0y} + a_0 t \end{aligned}$$

Ribadiamo ancora una volta che le costanti x_0, y_0, v_{0x} e v_{0y} si chiamano le *condizioni iniziali* e fanno parte dei dati del problema. In effetti occorre tener presente che il signor Newton ci permette di predire solo le variazioni di velocità del moto (scusate se è poco). Non ci può dire qual era la velocità iniziale del corpo dato che questa è un dato iniziale del problema e dobbiamo conoscerla noi. Se il corpo che si muove ha in partenza (al tempo $t = 0$) una sua velocità questa si somma a tutte le variazioni previste dalla legge di Newton. In definitiva, abbiamo una soluzione universale che va bene in qualunque parte del mondo, per qualunque velocità iniziale ha il corpo: basta che mettiamo i numeri giusti nelle condizioni iniziali.

94 Moto dei gravi Conviene in questo caso scegliere l'asse y lungo la verticale e orientato verso l'alto. In tal caso $a_0 = -g$ e abbiamo

$$(37) \quad x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

$$(38) \quad y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Per determinare la traiettoria si deve eliminare il tempo dalle equazioni, esprimendo y in funzione di x . Si ottiene allora l'equazione di una *parabola*, con il massimo a una certa quota $y = h$ e i due rami rivolti verso il basso. A seconda delle condizioni iniziali, naturalmente le parabole che si ottengono sono diverse. Se x_0 e y_0 non mutano, le parabole ottenute per diverse velocità iniziali rappresenteranno una famiglia di traiettorie per i corpi lanciati dalla stessa posizione iniziale con velocità e angoli diversi.

95 Traiettoria parabolica Calcoliamo la traiettoria immaginando di lanciare il corpo dall'origine delle coordinate: allora avremo $x_0 = y_0 = 0$. Ricavando il tempo dall'equazione (37) e sostituendolo nella (38) otteniamo quindi:

$$(39) \quad y = x \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{g}{v_{0x}^2}$$

che è l'equazione di una *parabola*. La traiettoria di qualunque corpo pesante (o, più in generale, soggetto a una forza costante) è sempre una parabola.

La parabola interseca l'asse x in due punti: $x = 0$ (il punto da cui è avvenuto il lancio) e il punto

$$(40) \quad x_M = 2 \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}$$

che rappresenta la *gittata* del proiettile.

Invece di utilizzare le componenti della velocità v_{0x}, v_{0y} può essere più comodo scrivere la gittata in termini del modulo $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ e dell'angolo di lancio α rispetto all'orizzontale (per cui $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ e $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$). In tal caso

$$(41) \quad x_M = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Dalla (41), si trova che la massima gittata si ottiene quando $\sin 2\alpha$ assume il valore 1, ossia per $\alpha = \pi/4$. A parità di angolo la gittata cresce quindi con il quadrato della velocità iniziale del proiettile.

Per simmetria, la massima altezza del proiettile viene raggiunta a metà gittata, ossia per $x = x_M/2$ e vale

$$(42) \quad y_M = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

ed è quindi massima per $\alpha = \pi/2$ ossia quando il proiettile viene lanciato verticalmente.

96 Tempo di caduta Guardando al moto del grave come a una sovrapposizione di moti (rettilineo uniforme lungo x e uniformemente accelerato lungo y) è facile rendersi conto che il tempo che un corpo lanciato impiega a cadere a terra non dipende che dal moto verticale. Ad esempio, qualunque oggetto scagliato orizzontalmente (quindi con $v_{0y} = 0$) da una quota h , tocca terra dopo un tempo $t^* = \sqrt{2h/g}$, cioè lo stesso tempo di un corpo lasciato cadere da fermo. Naturalmente il valore di x^* in cui il corpo tocca terra *dipende* dal valore della componente v_{0x} della velocità.

97 Il verso del tempo Consideriamo le equazioni di moto di un grave (37),(38) e immaginiamo di sostituire t con $-t$. Cosa significa questo? Che abbiamo scambiato il futuro col passato. Se calcoliamo x e y dopo -360 s stiamo semplicemente domandandoci *dov'era* il corpo 6 minuti fa.

Ora, se nelle equazioni mettiamo $t = -360$ s la posizione e la velocità del corpo saranno in genere diverse da quelle a $t = 360$ s. Ma se contemporaneamente al posto di (v_{0x}, v_{0y}) mettiamo $(-v_{0x}, -v_{0y})$ (ossia cambiamo il segno alla velocità) tutto torna a posto. Esiste una simmetria delle equazioni per cui se cambiamo di segno insieme il tempo e le velocità il moto resta lo stesso. Ne segue che se un certo moto è possibile nel futuro, esso sarà uguale a un moto nel passato con le velocità scambiate. Se immaginiamo di poter ottenere il moto nel passato proiettando a ritroso il filmato di un moto verso il futuro capiamo perché le velocità devono cambiare di segno.

Osservando in un filmato una pallina che cade non potremmo quindi dire se essa sia una pallina che realmente è caduta o se invece non stiamo vedendo il film a ritroso di una pallina che sale. Infatti entrambi i moti sono perfettamente plausibili. L'osservazione di un fenomeno meccanico semplice non permette quindi di determinare il verso del tempo. Vedremo oltre quando questo non avviene.

98 Tempo di volo di un proiettile Applichiamo le considerazioni precedenti al tempo di volo di un proiettile che compie la traiettoria parabolica (39). Quando il proiettile raggiunge l'altezza massima y_M la sua velocità v_y è nulla. Sappiamo quindi (96) che da quel punto il corpo cadrà a terra in un tempo $t^* = \sqrt{2y_M/g}$. Ma per la simmetria questo è lo stesso tempo che il corpo ha impiegato per salire per cui il tempo di volo sarà $T = 2\sqrt{2y_M/g}$. Sostituendo dalla (42) otteniamo:

$$(43) \quad T = 2 \frac{v_{0y}}{g} = \frac{x_M}{v_{0x}}$$

L'ultimo passaggio ci fa verificare che T si poteva anche ottenere semplicemente dividendo la gittata per la velocità lungo x . E' istruttivo vedere come si arriva allo stesso risultato in due modi differenti.

99 Un secchio di palline Immaginiamo di avere un secchio di palline, rovesciamolo e facciamole cadere per terra mentre filmiamo il tutto. Le palline rimbalzano sul pavimento e vanno da tutte le parti. Proiettiamo il film alla rovescia: quello che vediamo ci sembra plausibile? Possiamo dire che stiamo assistendo a un evento naturale?

La risposta è ovviamente no, tuttavia se analizziamo il moto di ogni singola pallina questo appare del tutto plausibile dato che è il moto di un pallina scagliata dal pavimento verso l'alto. Guardando la singola pallina non potremo dire se il film è nel verso giusto o alcontrario. Tuttavia affinché **tutte** le palline tornino nel secchio esse dovrebbero essere lanciate dal pavimento con delle velocità ben definite. Ma fare in modo che centinaia di palline siano lanciate con le velocità giuste per farle entrare nel secchio non è qualcosa di *normale*. Pertanto il film proiettato al rovescio non è plausibile come quello proiettato in avanti. Fra passato e futuro non vi è più simmetria, anche se il moto delle singole particelle è simmetrico, e questo deriva dalla complessità del sistema che stiamo considerando. I sistemi complicati (ad esempio quelli biologici) evolvono da situazioni che potremmo definire semplici a situazioni complicate, ma l'inverso è assai poco probabile. Ecco perché si invecchia.

100 La forza di gravitazione La forza di gravitazione si esercita fra due corpi dotati di massa. Essa è attrattiva, e il suo modulo è dato da:

$$(44) \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove r è la distanza fra le due masse. La costante G è misurata sperimentalmente in laboratorio e vale $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$. Per corpi vicini alla superficie della Terra, la forza di gravitazione si riduce alla forza peso. Infatti si può approssimare r col raggio della Terra, R_T e considerare la forza costante. Si ha quindi:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Per scrivere la forza gravitazione esercitata da 1 su 2 in termini vettoriali, utilizziamo il vettore $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ che è diretto da 1 a 2. Il *versore* corrispondente è

$$\vec{e}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

Essendo la forza attrattiva, essa è diretta in senso opposto a questo vettore. Quanto alla forza esercitata da 2 su 1, si ottiene utilizzando $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ e $r_{12} = r_{21}$:

$$(45) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{21} \\ \vec{F}_{12} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{21} = -\vec{F}_{21} \end{aligned}$$

in ossequio al principio di azione e reazione.

101 Volendo misurare la forza di gravitazione fra due masse utilizzabili in un laboratorio occorre tener presente che essa è piccolissima rispetto alle altre forze in gioco. Essa quindi dà luogo ad accelerazioni piccolissime e misurabili con grande difficoltà. Fra le perturbazioni prima di tutto occorre considerare il peso, che poi non è altro che la forza di gravitazione esercitata sui corpi dalla Terra con la sua massa di circa 10^{24} kg ! Poi ci sono gli attriti, e le forze elettrostatiche (se ci sono cariche elettriche non nulle sui corpi in oggetto) sono anch'esse fonte di perturbazioni difficili da eliminare.

La prima misura di G fu effettuata nel 1798 da Henry Cavendish utilizzando una *bilancia di torsione* che ha una sensibilità molto elevata. A causa dei problemi di misura la costante G è nota con una precisione relativamente scarsa (1 parte su 10.000) rispetto ad altre grandezze della fisica. Molto più semplice è l'esperimento per verificare che la forza di gravità non dipende dalle sostanze di cui sono costituite le masse. Le misure di Dicke e collaboratori (anni '60) hanno permesso di verificare che la forza esercitata dal sole su masse di alluminio e oro è la stessa a meno di 1 parte in 10^{11} .

102 Moto in un campo gravitazionale E' questo il moto dei pianeti, dei satelliti, delle comete e delle stazioni spaziali. La risoluzione dell'equazione del moto è complessa e la vedremo solo nel caso semplice di un'orbita circolare. Nel caso generale il moto dei pianeti ha delle traiettorie che sono delle *ellissi*, una classe di figure geometriche con proprietà ben definite (che al suo interno contiene, come caso particolare, i cerchi).

Vale la pena di notare che l'equazione del moto è risolvibile analiticamente solo per il cosiddetto *problema dei due corpi* (ossia per esempio Sole-Terra o Terra-Luna). Non esistono soluzioni per tre o più corpi, nemmeno per il sistema Sole-Terra-Luna, nonostante sia stato studiato da oltre cento anni da famosi astronomi e matematici.

103 Orbita circolare Consideriamo la massa M più pesante fissa nell'origine mentre la più leggera (m) percorre attorno alla prima un cerchio (orbita) di raggio R con velocità tangenziale v . Essendo R fisso la forza gravitazionale ha modulo costante pari a

$$(46) \quad F = G \frac{Mm}{R^2}$$

Ricordando quel che abbiamo detto in (65) la massa in orbita ha un'accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

che dev'essere prodotta da una forza centripeta ma_c . Fortunatamente la forza gravitazionale, essendo attrattiva e diretta verso il centro, è un'ottima candidata per essere proprio lei la forza centripeta. Uguagliando (46) con ma_c otteniamo facilmente v^2 :

$$(47) \quad v^2 = G \frac{M}{R}$$

Ne segue che la velocità tangenziale è costante e quindi il moto è di tipo circolare uniforme. Partendo dalla (47) si ottiene facilmente il periodo T dell'orbita. Ne segue la III legge di Keplero: *i quadrati dei tempi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori*:

$$(48) \quad T^2 \propto R^3 \quad \text{ossia} \quad R^3/T^2 = \text{cost}$$

Gli assi maggiori si riferiscono alle orbite ellittiche. Per orbite circolari asse maggiore = asse minore = R come in questo caso.

La III legge di Keplero si verifica sui pianeti del sistema solare. L'accordo fra dati sperimentali e la legge è ottimo come si vede dalla Tabella dove viene riportato nell'ultima colonna il rapporto R^3/T^2 che è praticamente costante

Verifica della III Legge di Keplero

	Distanza media dal Sole (10^6 km)	Periodo di rivoluzione (anni)	R^3/T^2
Mercurio	57.9	0.241	3341962
Venere	108	0.615	3330588
Terra	150	1.000	3375000
Marte	228	1.88	3353426
Giove	778	11.9	3325407
Saturno	1430	29.5	3360191
Urano	2870	29.5	3350326
Nettuno	4500	165	3347107
Plutone	5900	248	3339278

Le piccole discrepanze fra i numeri della colonna di destra sono semplicemente dovute al fatto che abbiamo approssimato delle orbite ellittiche con orbite circolari.

104 Ipotesi alternative per la forza gravitazionale La III legge di Keplero (48) costituisce una delle migliori verifiche della dipendenza da R della forza gravitazionale. Se ad esempio qualcuno ipotizzasse una forza del tipo

$$F = G' \frac{Mm}{R^3}$$

la III legge diventerebbe

$$T^2 \propto R^4$$

in palese disaccordo coi dati astronomici come si può verificare facilmente.

105 Forza elastica. Legge di Hooke Una molla si può definire come un dispositivo che esercita una forza quando viene allungato o compresso. Una molla è caratterizzata da una sua *lunghezza naturale* ℓ_0 (che può anche essere nulla). In compressione la molla si accorcia ($\Delta\ell = \ell - \ell_0 < 0$) mentre in estensione si allunga ($\Delta\ell = \ell - \ell_0 > 0$).

Ci si rende facilmente conto che tale forza cresce con l'allungamento o la compressione. La *legge di Hooke* e rappresenta con buona approssimazione la forza di richiamo di una molla di cui $\Delta\ell$ rappresenta l'allungamento:

$$(49) \quad \vec{F} = -k\vec{\Delta\ell}$$

L'allungamento viene scritto come vettore dato si deve specificare in genere la direzione in cui la molla viene allungata. k si misura in N/m e prende il nome di *costante elastica* della molla. Quanto più grande è k tanto più la molla è "robusta" ossia esercita una notevole forza di richiamo anche per piccoli allungamenti. Il segno "−" ci dice che la direzione della forza è sempre *opposta* all'allungamento, e la sua intensità cresce con l'allungamento della molla stessa.

Se una molla ha lunghezza naturale nulla e la supponiamo posta nell'origine la legge di Hooke (in una dimensione) prende la forma

$$F = -kx$$

dato che l'allungamento della molla è proprio x .

106 Peso attaccato a una molla Se lasciamo andare un corpo di massa m appeso a una molla questa si allungherà fino a sviluppare una forza che controbilancia il peso. Ciò significa (vedi sopra) che la forza risultante sul corpo è nulla. Quanto vale in questo caso l'allungamento? Risposta:

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k}$$

Si vede quindi che è possibile misurare l'intensità della forza peso misurando l'allungamento della molla. Una molla usata per misurare la forza si chiama un *dinamometro*. Nel caso della forza peso la chiamiamo anche *bilancia*.

107 Moto di un corpo soggetto a una forza elastica La soluzione non è semplicissima per cui la tratteremo in seguito nel capitolo sul moto oscillatorio.

108 A questo punto dovrebbe essere ben chiaro, ma lo ripetiamo ancora una volta, che se osserviamo un punto materiale fermo o in moto rettilineo uniforme esso dev'essere soggetto a una forza risultante nulla. Se siamo certi che almeno una forza non nulla è applicata ad esso, allora deve esserne almeno una seconda che equilibra la prima. Riflettendoci sopra finiremo sempre per individuarla.

109 Dinamometri Il fatto che le forze siano sommabili come vettori ci offre una possibilità alternativa di misurarle staticamente. Ad esempio, sospendendo a una molla una massa M possiamo misurare l'allungamento della molla. Questo corrisponderà alla forza peso $M\vec{g}$. Utilizzando delle masse $2M, 3M$, ecc., potremo tarare la molla in termini di forze. Tale molla si chiama *dinamometro*.

110 Impulso Consideriamo una forza \vec{F} che agisce per un tempo Δt molto breve. In base alla Legge di Newton (80) possiamo scrivere:

$$(50) \quad \vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{p}$$

e la grandezza $\vec{F}\Delta t$ prende il nome di *impulso della forza* F . Questa relazione prende anche il nome di *Teorema dell'impulso*. Si utilizzerà questo teorema per studiare fenomeni (detti appunto impulsivi) nei quali sono in gioco forze considerevoli ma che durano un tempo molto piccolo (tali però che il prodotto $\vec{F}\Delta t$ sia finito e non infinitesimo). Un esempio sono gli urti. In quei casi, il corpo in pratica non si muove apprezzabilmente durante l'applicazione della forza, ma acquista una quantità di moto (o varia quella che già possiede) in base alla (50).

111 Una palla di massa $m = 0.5$ kg arriva a terra con velocità $V_y = -10$ m/s e rimbalza verso l'alto con velocità $V'_y = 10$ m/s. Se l'urto dura 0.05 s quanto vale la forza esercitata dal pavimento?

Risposta: la variazione di quantità di moto vale $2m(V'_y - V_y) = 20$ kg m/s. Dalla (50) troviamo $F = 20/0.05 = 400$ N, una forza ben maggiore del peso che agisce sulla palla.

112 Terzo principio o principio di azione e reazione Questo principio ci dice che le forze non vengono mai sole. Infatti dati due punti materiali *isolati* (non soggetti a forze esterne) si osserva che:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

ovvero la forza che 1 esercita su 2 è uguale e contraria a quella che 2 esercita su 1. L'equazione può risciversi come:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{F}_R = 0$$

ovvero *la risultante delle forze interne è nulla*. Pertanto la *quantità di moto totale*

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

di un sistema *isolato* di 2 corpi rimane costante nel tempo, o, con altro termine, *si conserva*. Infatti la sua derivata è zero:

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = m_1\dot{\vec{v}}_1 + m_2\dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

113 Le reazioni vincolari Sappiamo dall'esperienza che un corpo poggiato sopra un piano orizzontale è in quiete. Pertanto dovrà essere:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{est} &= 0 \\ \sum \vec{F}^{est} = M\vec{g} + \vec{\mathcal{R}} &= 0\end{aligned}$$

$\vec{\mathcal{R}}$ è la forza esercitata dal piano sul corpo *che lo fa restare in quiete* altrimenti il corpo cadrebbe attraverso il piano:

$$\vec{\mathcal{R}} = -M\vec{g}$$

e si chiama *reazione vincolare*. Un *vincolo*, come dice il nome, modifica le possibilità di movimento di un corpo. Il vincolo fa questo esercitando sul corpo delle forze, dette *reazioni vincolari*, che sommandosi alle forze esterne modificano il movimento del corpo stesso. Nel caso del piano appunto la reazione vincolare obbliga il corpo a stare solo da un lato del piano. Un altro caso può essere quello di obbligare il corpo a seguire una determinata traiettoria (esempio: i binari del treno).

È da notare che la reazione vincolare si adatta, per così dire, *automaticamente*, alla forza con la quale deve combinarsi. Uno stesso piano può quindi esercitare delle reazioni vincolari di intensità diversissima, semplicemente in base al peso dell'oggetto che gli viene poggiato sopra. Naturalmente ci sono dei limiti, che non hanno nulla di misterioso ma anzi un ben chiaro significato fisico: se il piano non è più in grado di esercitare la necessaria reazione vincolare si rompe.

114 Reazione vincolare normale Nel caso che abbiamo esaminato la reazione è normale alla superficie di contatto dell'oggetto col piano. La reazione inoltre è rivolta verso l'esterno del vincolo, in modo da *respingere* il corpo. Si chiama *liscio* un vincolo che può esercitare solo reazioni normali alla sua superficie.

115 Se alla forza peso aggiungiamo una forza \vec{F}_0 il vincolo reagisce con $\vec{\mathcal{R}} = -M\vec{g} - \vec{F}_0$ (che ha modulo $Mg + |F_0|$ se la forza è concorde col peso). Se invece la forza tende a *sollevare* il corpo allora $|\mathcal{R}| = Mg - |F_0|$ e se $|F_0| = Mg$ allora la forza di reazione vincolare si annulla, in quanto il corpo si distacca dal vincolo.

116 III Principio e reazioni vincolari In base al principio di azione e reazione, se il vincolo esercita sul corpo una forza $\vec{\mathcal{R}}$, il corpo a sua volta esercita sul vincolo una forza $-\vec{\mathcal{R}}$. Questo fatto ci permette di rispondere alla domanda apparentemente banale: quale forza esercita sul pavimento una cassa di massa M o di peso $M\vec{g}$? (Naturalmente la risposta è: la cassa esercita una forza pari al suo peso.)

La forza peso $M\vec{g}$ è applicata alla cassa. Poiché la cassa sta sul pavimento questo reagisce applicando alla cassa la reazione $\vec{\mathcal{R}} = -M\vec{g}$. Per il principio di azione e reazione la cassa esercita infine sul pavimento una forza $-\vec{\mathcal{R}}$ che è appunto pari alla forza peso $M\vec{g}$.

117 Reazione vincolare su corpi in movimento Se il corpo è in movimento la reazione vincolare si combina con le altre forze agenti sul corpo stesso per sottometerlo all'azione del vincolo. Se il vincolo è liscio occorre sempre tener presente che la reazione vincolare può esercitarsi solo perpendicolarmente alla superficie del vincolo. O meglio, perpendicolarmente

alla *traiettoria che il vincolo obbliga il corpo a seguire*. Questa precisazione è importante se il vincolo è, ad esempio, un filo. In effetti il filo si comporta da vincolo quando è teso, e in tal caso la forza che esercita è allineata col filo, ma è tuttavia normale alla traiettoria che il corpo è costretto a seguire. Per chiarire meglio il concetto consideriamo un punto pesante che scivola senza attrito su una superficie curva. Per semplificare immaginiamo che il moto avvenga su un piano che taglia la superficie curva e consideriamo il moto su tale piano. Il moto del punto è determinato dalla legge di Newton:

$$\vec{F} = \vec{F}^{est} + \vec{\mathcal{R}} = m\vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + m \frac{v^2}{R} \vec{e}_N$$

Se scomponiamo la forza esterna \vec{F} in due componenti, una lungo \vec{e}_T e l'altra lungo \vec{e}_N , e teniamo conto che la reazione vincolare è solo lungo \vec{e}_N (perché il vincolo è liscio) potremo scrivere che:

$$\mathcal{R}_N + F_N^{est} = m \frac{v^2}{R}$$

Il senso positivo è nel verso di \vec{e}_N , quindi dalla parte del centro locale di curvatura (vedi fig. 12). Osserviamo che il secondo membro è sempre positivo, rappresentando la forza centripeta che è diretta verso il centro di curvatura.

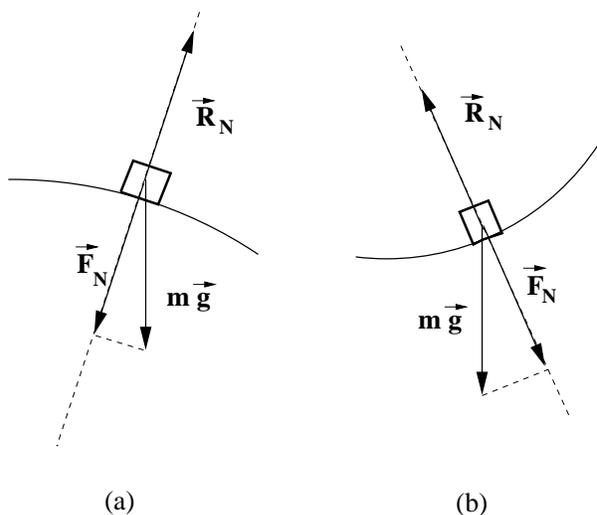


Fig. 12

Si possono esaminare due casi, a seconda se il punto sta dal lato convesso o concavo della superficie. Nel primo caso, (a), poiché \mathcal{R}_N dovrà essere *negativo*, questo può avvenire solo se la forza esterna è sufficientemente intensa da schiacciare, per così dire, il punto sulla superficie. Nel secondo caso, (b), \mathcal{R}_N dovrà essere *positivo* e l'equazione è sempre soddisfatta qualunque sia l'intensità della forza esterna.

Nel primo caso, se la forza esterna non è sufficiente o se l'accelerazione centripeta è troppo grande l'eguaglianza non è più soddisfatta e il punto si distacca dal vincolo.

118 Piano inclinato Consideriamo un corpo di massa M su un piano inclinato liscio che forma un angolo α con l'orizzontale (Fig. 13). In questo caso conviene assumere un sistema di assi cartesiani con l'asse x parallelo al piano e l'asse y perpendicolare a questo. Il corpo è soggetto alla forza peso $M\vec{g}$ e alla reazione vincolare \vec{R}_N , normale al piano in quanto questo è liscio. Dato che il corpo si deve muovere lungo il piano queste due forze si devono combinare in modo da avere una risultante parallela al piano. Con la scelta degli assi indicata vediamo quindi che la risultante delle forze lungo y si deve annullare. Dato che

la reazione vincolare è normale al piano essa non può influenzare il moto lungo l'asse x :

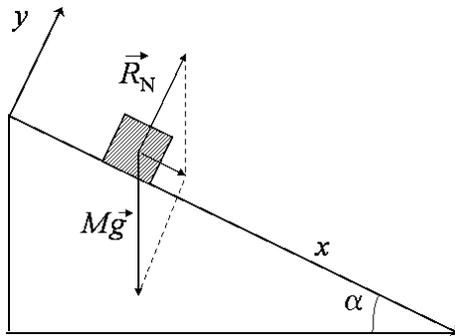


Fig. 13

$$0 = R_N - Mg \cos \alpha$$

$$F_x = Mg \sin \alpha$$

La prima equazione ci fornisce il valore della reazione vincolare. Dalla seconda otteniamo l'accelerazione lungo il piano:

$$a_x = g \sin \alpha$$

Il moto è quindi di tipo uniformemente accelerato.

119 Corde Una corda o filo può costituire, se tesa, un vincolo. La corda per costituire un vincolo ideale dev'essere *inestensibile*. Non è invece necessario che sia priva di massa.

Si chiama *tensione* nel punto X di una corda il *modulo della forza che la corda sviluppa in quel punto*.

Una corda tesa lunga L sottoposta a una forza \vec{F}_A e \vec{F}_B ai due estremi A e B , si muove con un'accelerazione data da:

$$\vec{a} = (\vec{F}_A + \vec{F}_B)/m$$

dove m è la massa della corda. Ne segue che una corda di massa nulla, per muoversi con accelerazione *finita*, deve essere sottoposta a forze di egual modulo ai due estremi. In tal caso la tensione della corda è la stessa in tutti i punti e vale $T = |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$. Se invece la massa non è nulla, la tensione varia da punto a punto e si ricava facilmente.

Un segmento di corda lungo x attaccato all'estremo A ha massa $m_x = (x/L)m$ ed è sottoposto a una forza risultante $F_A - T(x)$. Siccome la sua accelerazione è la stessa di tutta la corda nel suo insieme, ne segue che dev'essere:

$$\mathcal{T}(x) = F_A + (F_B - F_A) \frac{x}{L}$$

ovvero la tensione varia *linearmente* da un estremo all'altro fra i valori $|\vec{F}_A|$ e $|\vec{F}_B|$.

120 Esempio Nella fig. 14 sono rappresentati 3 blocchi che scivolano su un piano orizzontale liscio, collegati fra loro da corde ideali e prive di massa. Una forza orizzontale F è applicata in c (diretta verso destra). Si deve trovare l'accelerazione dei blocchi e la tensione delle corde in a , b e c .

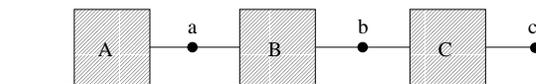


Fig. 14

Per risolvere il problema si parte dall'ultimo corpo della fila, A e si scrivono le equazioni del moto per i tre blocchi:

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_a &= M_A a \\ \mathcal{T}_b - \mathcal{T}_a &= M_B a \\ \mathcal{T}_c - \mathcal{T}_b &= M_C a \end{aligned}$$

Notiamo che $\mathcal{T}_c = F$. Sommando membro a membro le 3 equazioni abbiamo

$$(52) \quad F = (M_A + M_B + M_C) a$$

da cui si ottiene subito l'accelerazione a . Inserendola nelle equazioni (51) si ottengono le altre tensioni.

121 L'equazione (52) si sarebbe potuta scrivere subito dato che (1) il sistema dei 3 blocchi si muove rigidamente come se fosse un unico punto materiale di massa $M_A + M_B + M_C$ al quale è applicata l'unica forza esterna (non ci sono attriti!) F .

122 Ove ci fossero attriti, occorrerà inserirli nelle equazioni 51 insieme alle tensioni.

123 Se al posto delle corde ideali ci fossero delle molle i risultati non cambierebbero. Per sviluppare le opportune tensioni le molle in questo caso devono ovviamente allungarsi. La Legge di Hooke (**105**) permette di calcolare di quanto si allunga ogni molla. Ad esempio, per la molla in **a**:

$$\Delta \ell_a = \mathcal{T}_a / k$$

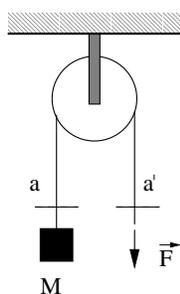


Fig. 15

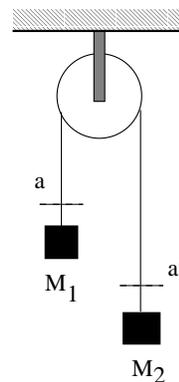


Fig. 16

124 Carrucole Le carrucole sono delle semplici macchine. Ricordiamo che in Meccanica una macchina è “qualunque sistema mediante il quale si possa trasmettere l'azione di una forza da un punto a un altro, o modificare comunque l'azione di una forza” (A. Battelli). Per semplificare immaginiamo di aver a che fare con carrucole di massa nulla e corde anch'esse di massa nulla. Nella fig. 15 vediamo una carrucola che ruota attorno a un perno appeso a un soffitto. Una massa M è appesa a un estremo della corda, mentre all'altro estremo viene applicata una forza \vec{F} . Essendo la corda e la carrucola di massa nulla, la tensione della corda, è la medesima in a e a' e quindi sarà $\mathcal{T} = F$. Ne consegue che al corpo è applicata una forza risultante di modulo $F - Mg$ e diretta verso l'alto.

Se adesso in a' appendiamo una seconda massa M_2 (fig. 16) le tensioni in a e a' rimangono sempre uguali fra loro. Sia T il loro valore. I due corpi sono quindi soggetti alle forze:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (\mathcal{T} - M_1 g) \vec{e}_y \\ \vec{F}_2 &= (\mathcal{T} - M_2 g) \vec{e}_y \end{aligned}$$

dove al solito \vec{e}_y è il versore dell'asse y diretto lungo la verticale e orientato verso l'alto.

Scrivendo le equazioni del moto abbiamo:

$$(53) \quad \begin{aligned} M_1 a_{1y} &= (\mathcal{T} - M_1 g) \\ M_2 a_{2y} &= (\mathcal{T} - M_2 g) \end{aligned}$$

ma se la massa 1 si sposta di Δy la 2 si sposterà di $-\Delta y$ (se 1 sale 2 scende della stessa altezza e viceversa) quindi le velocità e le accelerazioni sono uguali ed opposte. Per cui, eliminando \mathcal{T} dall'equazione (53), abbiamo:

$$a_{1y} = g \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}$$

Questo montaggio della carrucola si chiama *macchina di Atwood*.

125 Il paranco Finalmente un altro montaggio della carrucola si vede nella fig. 17, dove un estremo della corda è fissato, p. es. al soffitto, mentre la massa è appesa al perno della carrucola. In tal caso la forza applicata alla massa è $2T - Mg$ ed essendo $T = F$ ne segue che si può tenere in equilibrio la massa applicando alla corda una forza pari a metà del suo peso. Questo è il principio del *paranco*. Nel paranco, se la corda al cui estremo è applicata la forza si sposta di Δy , la massa si sposta di $\Delta y/2$. In effetti, riferendoci sempre alla fig. 17, consideriamo il tratto di corda fra a e a' . Sia la sua lunghezza L . Metà di questa lunghezza si trova fra a e l'estremo basso della carrucola, metà fra lo stesso estremo e a' .

Se ora alziamo di Δy l'estremo a' della corda, e la carrucola sale di ΔY , possiamo scrivere che $L = 2(L/2 - \Delta Y) + \Delta y$ da cui segue appunto che $\Delta Y = \Delta y/2$. Il ragionamento si estende subito alle velocità e alle accelerazioni, ossia se l'estremo della corda ha accelerazione a_y allora la carrucola ha accelerazione $a_y/2$.

126 Le forze di attrito statico fra solidi Sappiamo dall'esperienza che per mettere in movimento un corpo che si trova a riposo su un piano occorre applicargli una forza *minima*. Ciò avviene perché la reazione vincolare non è puramente normale al piano, ma ha anche una componente tangente al piano, $\vec{\mathcal{R}}_t$. Tale reazione vincolare non ha un valore prefissato, ma è tale da poter controbilanciare la forza applicata dall'esterno, *entro certi limiti*: $|\vec{\mathcal{R}}_t| \leq \mu_s |\vec{\mathcal{R}}_N|$. La costante μ_s si chiama *coefficiente di attrito statico* ed è caratteristica del contatto fra la superficie del corpo e quella del piano. Valori elevati di μ_s significano grande attrito. In pratica il valore di μ_s è sempre ≤ 1 .

127 Le forze di attrito dinamico fra solidi Se il corpo menzionato sopra si mette in movimento, interviene in genere la *forza di attrito dinamico* che si manifesta come una componente delle reazione vincolare tangente al piano il cui valore assoluto è dato da $|\vec{\mathcal{R}}_t| = \mu_d |\vec{\mathcal{R}}_N|$. Notare il segno di eguale rispetto al minore o eguale dell'attrito statico. La direzione della forza di attrito dinamico è sempre opposta alla velocità del corpo.

Il *coefficiente di attrito dinamico*, μ_d , è in generale più piccolo di μ_s .

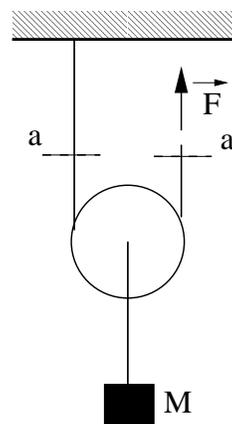


Fig. 17

128 Blocco su piano orizzontale scabro In questo caso $\mathcal{R}_N = mg$ dove m è la massa del blocco. Se applichiamo al piano una forza **orizzontale** F questa non altera \mathcal{R}_N . La massima reazione di attrito sarà quindi $F_a = \mu_s mg$ e il blocco si metterà in movimento se

$$F > \mu_s mg$$

forza parallela al piano

Supponiamo adesso che la forza faccia un angolo β con l'orizzontale. La componente verticale $F \sin \beta$ si sommerà alla forza peso, per cui la reazione vincolare diventa

$$\mathcal{R}_N = mg - F \sin \beta$$

Notiamo che a seconda del segno di β la reazione diminuisce o aumenta rispetto a mg per cui l'attrito rispettivamente diminuisce o aumenta. Se β è negativo la forza schiaccia il blocco sul piano accrescendo l'attrito. Tenendo conto che la componente orizzontale della forza vale $F \cos \beta$ ne segue che il movimento del blocco avverrà se

$$F \cos \beta > \mu_s (mg - F \sin \beta)$$

$$F (\cos \beta + \mu_s \sin \beta) > \mu_s mg$$

forza obliqua rispetto al piano

Massimizzando $\cos \beta + \mu_s \sin \beta$ si minimizza la forza F . Il massimo di $\cos \beta + \mu_s \sin \beta$ si ha per $\tan \beta = \mu_s$. In tal caso

$$F > \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} mg$$

129 Attrito dinamico Nel caso generale di forza obliqua l'accelerazione è data da

$$a = \frac{F}{m} (\cos \beta + \mu_d \sin \beta) - \mu_d g$$

130 Le forze di attrito viscoso Le forze di attrito viscoso si manifestano su corpi in moto dentro dei fluidi. La resistenza dell'aria è un esempio noto a tutti. Sono forze dipendenti dalla velocità, che aumentano con essa. A basse velocità la dipendenza è lineare in v , e diventa quadratica a velocità maggiori. L'attrito viscoso dipende anche dalla forma del corpo, e in particolare dalla sua *sezione trasversa*. Per forze viscosive quadratiche in v vale in genere la formula di Newton:

$$\vec{F}_a = -\frac{1}{2} C_r \rho S v^2 \vec{e}_v$$

dove ρ è la densità del fluido, S la sezione trasversa del corpo, e C_r un coefficiente che dipende dalla forma del medesimo. A titolo d'esempio, per un'automobile ben studiata dal punto di vista *aerodinamico* $C_r \approx 0.3$.

Un corpo che cade, soggetto alla resistenza dell'aria, vedrà la sua velocità crescere fino a un valore limite. Per tale valore la forza di gravità è uguale e opposta all'attrito viscoso, cosicché la forza risultante è nulla e il corpo si muove di moto uniforme. La velocità limite corrisponde quindi alla soluzione di $F_a(v_{\text{lim}}) = mg$.

Capitolo IV

Trasformazioni di riferimento

131 In fisica non esistono sistemi di riferimento privilegiati: lo stesso fenomeno può essere studiato in sistemi di riferimento diversi e in ciascuno di questi dev'essere possibile una descrizione del fenomeno in base alle medesime leggi della fisica. Ne consegue che le osservazioni e le misure fatte in un sistema di riferimento devono essere "traducibili" per un osservatore che usa un altro riferimento. Deve'essere quindi possibile trovare delle formule che permettono di effettuare le cosiddette *trasformazioni di riferimento*.

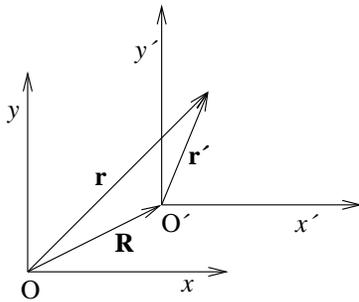


Fig. 18

132 Trasformazione delle coordinate In fig. 18 abbiamo rappresentato due riferimenti, che chiameremo Σ e Σ' , nei quali sono definiti due sistemi di coordinate cartesiane ortogonali (Oxy e $O'x'y'$). Nella figura gli assi sono fra loro paralleli e se durante il moto gli assi si mantengono sempre paralleli allora diciamo che i due riferimenti **traslano** l'uno rispetto all'altro. Se ciò non avviene significa che i due riferimenti sono anche animati da un moto di rotazione relativa.

Avvertenza: le formule che daremo nel seguito, a meno di un esplicito avviso, si applicano solo al caso semplice della traslazione.

Supponiamo di trovarci nel primo riferimento e di studiare il moto di un punto P: ad esso faremo corrispondere un vettore $\vec{OP} = \vec{r}$. L'origine del riferimento mobile, O' , sarà identificata dal vettore $\vec{OO'} = \vec{R}$. Volendo, potremmo anche identificare il punto P utilizzando un altro vettore, $\vec{O'P} = \vec{r}'$ e la relazione evidente

$$(54) \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

Anche se abbiamo ricavato l'eq. (54) immaginando di trovarci nel riferimento Σ , essa costituisce una *relazione fra vettori* e vale in qualunque sistema di riferimento.

Nel solo caso della traslazione, poiché gli assi rimangono paralleli, passando alle componenti la relazione diventa:

$$(55) \quad \begin{aligned} x &= x' + X \\ y &= y' + Y \end{aligned}$$

133 Trasformazione della velocità Per ottenere la legge di trasformazione delle velocità deriviamo la (54) ottenendo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$d\vec{R}/dt$ si identifica immediatamente come la velocità \vec{V} con cui l'origine il riferimento Σ' si muove rispetto a Σ . $d\vec{r}'/dt$ è invece la velocità di P in Σ' ossia \vec{v}' . Abbiamo quindi la legge di trasformazione delle velocità fra i due riferimenti:

$$(56) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V} \end{aligned}$$

134 Velocità relativa Se P è fermo nel riferimento mobile Σ' questo si chiama il *riferimento di quiete* di P. In tal caso la velocità misurata nel riferimento Σ \vec{v} è nient'altro che \vec{V} dato che $\vec{v}' = 0$. Consideriamo ora due punti materiali P₁ e P₂ e siano Σ e Σ' i corrispondenti riferimenti di quiete. Chiamiamo *velocità relativa di 1 rispetto a 2* la velocità che 1 ha nel riferimento di quiete di 2 (quindi in Σ'): $\vec{v}_{12} = -\vec{V}$. Viceversa, chiamiamo *velocità relativa di 2 rispetto a 1* la velocità che 2 ha nel riferimento di quiete di 1 (quindi in Σ'): $\vec{v}_{21} = \vec{V}$. Come c'era da aspettarsi le due velocità sono uguali in modulo e direzione e opposte in verso. In generale quindi la velocità relativa di 2 punti i, j è sempre data da

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j = -\vec{v}_{ji}$$

135 Trasformazione dell'accelerazione Il procedimento per ottenere la legge di trasformazione dell'accelerazione è del tutto simile a quello usato per la velocità. Si derivare la (56) e si ottiene la formula seguente:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

dove \vec{A} è l'accelerazione di Σ' rispetto a Σ . Anche questa formula vale solo per il caso delle traslazioni. Si usa chiamare \vec{A} anche **accelerazione di trascinamento**.

136 Riferimenti inerziali Consideriamo un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme essendo soggetto a una forza nulla. Il sistema di riferimento in cui facciamo tale osservazione viene chiamato *riferimento inerziale* per significare che in esso vale il principio d'inerzia (70).

Se un secondo osservatore si muove rispetto a noi di moto rettilineo uniforme *senza ruotare su se stesso* l'oggetto continuerà ad apparirgli in moto rettilineo uniforme (133), seppure la sua velocità possa essere diversa di quella che appare a noi. In base al II Principio anche il secondo osservatore dedurrà che l'oggetto in questione è soggetto a una forza nulla e potrà affermare anch'egli la validità del principio d'inerzia nel suo riferimento, e quindi a buon diritto riterrà di essere in un riferimento inerziale.

Dato che la velocità del secondo osservatore rispetto a noi è del tutto arbitraria (basta che sia costante) deduciamo che passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro che trasla rispetto al primo in moto rettilineo uniforme ci troviamo ancora in un riferimento inerziale. In breve, tutti i sistemi di riferimento che traslano con moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale, sono anch'essi inerziali.

137 Principio di relatività di Galileo Si deduce subito che studiare un medesimo fenomeno fisico in diversi sistemi inerziali è del tutto equivalente. Questo fatto fu messo in evidenza per la prima volta da Galileo, e prende il nome di *principio di relatività*. Galileo sottolineò che era impossibile, per mezzo di misure condotte tutte all'interno di un medesimo riferimento, determinare se questo era o meno in movimento (rettilineo e uniforme), dato che in tutti questi riferimenti i fenomeni appaiono gli stessi.

Per capire meglio questo concetto, dobbiamo tenere in mente che le forze costituiscono l'essenza dei fenomeni fisici: un fenomeno nuovo in genere implica una nuova forza. Ora, il passare da un riferimento inerziale a un altro non fa nascere o scomparire accelerazioni e quindi nemmeno forze, pertanto non aggiunge nulla alla fisica che già conosciamo.

Una conseguenza del principio di relatività galileiana è che non ha nemmeno senso pensare all'esistenza di sistemi di riferimento privilegiati. Il vantaggio di usare un certo sistema rispetto a un altro dipende da fattori contingenti. Spesso una certa scelta appare naturale o serve a semplificare un problema.

138 Riferimenti non inerziali Al contrario, un corpo a riposo (o a $\vec{v} = \text{costante}$) visto da un osservatore che accelera apparirà muoversi di moto che non sarà più rettilineo uniforme. In tal caso l'osservatore, se è certo che il corpo non è soggetto a forze, riterrà non valido il principio d'inerzia. Il sistema di riferimento non è quindi per lui inerziale. L'accelerazione responsabile di questo può essere sia puramente scalare, sia dovuta a un cambiamento di direzione (rotazione).

139 Come caso particolare di sistema di riferimento accelerato consideriamo per esempio un sistema di riferimento che ruota: un sistema legato alla Terra compie una rotazione in 24 ore. La stella Deneb (visibile d'estate) è con buona approssimazione a riposo nel sistema di riferimento inerziale delle stelle fisse. Tuttavia a noi che stiamo sulla Terra Deneb appare fare un moto circolare: sorge, tramonta, passa dall'altra parte della Terra, riappare ecc. Non fa quindi un moto rettilineo uniforme pur non essendo presumibilmente soggetta a una forza attrattiva verso la Terra, data la sua enorme distanza (100 milioni di volte la distanza del Sole). Il principio d'inerzia non è quindi valido, e il sistema legato alla Terra non è un sistema inerziale.

140 Si potrebbe porsi la domanda: se $\vec{a} \neq 0$ come facciamo a stabilire se siamo in un riferimento non inerziale oppure se c'è effettivamente una forza che agisce sul punto? La risposta alla domanda non è semplice. In generale possiamo dire che se abbiamo ottime ragioni per ritenere il punto materiale *libero* allora lo stiamo osservando da un sistema di riferimento non inerziale. Nel caso della Stella Polare potremmo ipotizzare che la forza di attrazione gravitazionale sia responsabile della sua traiettoria circolare attorno alla Terra. Tuttavia si tratta di una forza minima data l'enorme distanza fra noi e la stella e certamente non può essere ritenuta responsabile del suo moto circolare. Inoltre un marziano che osservasse la stessa stella da Marte giungerebbe a conclusioni simili, solo che per lui la forza di attrazione sarebbe rivolta verso Marte. In definitiva l'ipotesi della forza non regge, l'unica ipotesi plausibile e la più semplice è che la Terra sia un sistema di riferimento *non inerziale*.

141 Forze apparenti in riferimenti non inerziali Sappiamo che nei riferimenti *non inerziali* il principio d'inerzia non è valido: un corpo libero ha un'accelerazione. È possibile salvaguardare formalmente il principio d'inerzia in tali sistemi attribuendo questa accelerazio-

ne alla presenza delle cosiddette *forze apparenti*. Queste forze apparenti si sommano alle forze reali e insieme a queste determinano il moto del corpo nel riferimento non inerziale.

Per determinarle consideriamo un punto materiale *libero* in un certo riferimento inerziale, quindi con accelerazione nulla. Servendoci della legge di trasformazione (135) troviamo che la sua accelerazione in un riferimento non inerziale sarà data dall'*accelerazione di trascinamento* di quest'ultimo, cambiata di segno:

$$(57) \quad \vec{a}' = -\vec{A}_{\text{trasc}}$$

Quindi la forza apparente, definita come quella forza che imprime a un corpo di massa m l'accelerazione osservata \vec{a}' , vale $\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{A}_{\text{trasc}}$.

Notiamo che la forza apparente, similmente alla forza peso, è proporzionale alla massa del corpo. Ne segue che in un sistema accelerato con un'accelerazione pari a g tutto si svolge come se si fosse in presenza della gravità terrestre. Questo è il *principio di equivalenza*.

142 Forza centrifuga Questa forza apparente si manifesta nei sistemi di riferimento che sono animati da un moto di rotazione e quindi non possiamo applicare le formule precedenti, che abbiamo ricavato solo per le traslazioni. Possiamo però facilmente capire qual è la sua origine se consideriamo un sistema Σ' solidale con un'auto che percorre una curva con velocità V . Il sistema Σ' è quindi un sistema rotante accelerato con l'accelerazione *centripeta* di modulo V^2/R . Un corpo di massa m , per percorrere la stessa traiettoria dell'auto (in modo da apparire in quiete rispetto ad essa), necessiterebbe quindi di una forza *centripeta* pari a mV^2/R . In mancanza di essa il corpo viaggia in linea retta di moto rettilineo uniforme e quindi nel riferimento Σ' esso appare animato da un'accelerazione verso l'esterno come se fosse soggetto a una forza *apparente centrifuga* di modulo mV^2/R .

La forza centrifuga è quindi realmente una *manca di forza centripeta*, e ha il suo stesso valore ma è diretta verso l'esterno.

143 Riferimenti in caduta libera Un sistema di riferimento che si muove, soggetto solo alla forza di gravitazione (ascensore che precipita, nave spaziale che viaggia a motori spenti, Terra che si muove intorno al Sole, ecc.) si dice in *caduta libera*. Si tratta di un riferimento non inerziale, nel quale l'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione di gravità nel luogo dove il riferimento si trova. Chiamiamo \vec{g}' tale accelerazione, che dà luogo alla forza apparente $\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{g}'$.

La forza di gravitazione agisce sui corpi che si osservano nel riferimento, e vale $\vec{F} = m\vec{g}'$. D'altronde l'osservatore nel riferimento in caduta libera dovrà scrivere la Legge di Newton sommando a questa la forza apparente, $\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{g}'$, per cui la forza risultante è nulla. Il risultato (valido indipendentemente dalla massa) è che il corpo risulterà *privo di peso* all'osservatore. Questo avviene appunto perchè l'osservatore e il corpo cadono insieme con la stessa accelerazione. Non essendovi quindi accelerazione relativa osservatore-corpo, quest'ultimo appare privo di peso.

Capitolo V

Lavoro ed Energia

144 Lavoro infinitesimo Consideriamo un punto materiale che si sposta di un tratto infinitesimo dx lungo l'asse x e su cui agisce una forza $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Supponiamo dapprima che la forza sia costante. Si chiama *lavoro infinitesimo* della forza \vec{F} il prodotto:

$$d\mathcal{L} = F_x dx$$

Se la forza non è costante la definizione va egualmente bene: naturalmente la forza dovrà essere calcolata nella posizione in cui si trova il punto, e dato che lo spostamento è infinitesimo potremo supporre la forza costante da x a $x + dx$ durante lo spostamento e usare il valore calcolato in $P = (x, y, z)$.

Se lo spostamento non avviene lungo l'asse x ma ha componenti (dx, dy, dz) (ed è quindi rappresentabile da un vettore infinitesimo $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$) il lavoro infinitesimo è dato da:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

essendo il prodotto quello scalare per il quale possiamo anche scrivere $d\mathcal{L} = |F| ds \cos\theta$, dove ds è lo spostamento ($ds = |d\vec{r}|$) e θ è l'angolo che esso fa con la forza. In altro modo equivalente potremo scriverlo $d\mathcal{L} = F_{\parallel} ds$ dove abbiamo introdotto la componente della forza *parallela* alla traiettoria. Avremo quindi che il lavoro potrà essere:

1. positivo se \vec{F} e $d\vec{r}$ sono concordi;
2. negativo se \vec{F} e $d\vec{r}$ sono discordi;
3. nullo se \vec{F} e $d\vec{r}$ sono ortogonali;

145 Importante. Lo spostamento del punto sarà ovviamente determinato dalla forza risultante che agisce su di esso, in base alla legge di Newton. Tuttavia se sul corpo agiscono più forze niente ci impedisce calcolarci separatamente i lavori fatti da ciascuna di dette forze. Ad esempio, se su un punto agiscono la forza peso e una forza di attrito viscoso, potremo calcolare separatamente i lavori fatti da ciascuna di queste forze. Sommandoli insieme avremo il lavoro della forza risultante.

146 Moto rettilineo uniforme Se un corpo si muove di *moto rettilineo uniforme* sotto l'azione di più forze (ad esempio, corpo pesante che cade sottoposto ad attrito viscoso) il lavoro totale fatto dalle forze è nullo. Infatti essendo il moto uniforme la forza risultante è necessariamente nulla e così è il lavoro.

147 Lavoro delle reazioni vincolari e delle forze d'attrito Le reazioni vincolari dei vincoli *lisci* sono, per definizione, sempre normali allo spostamento (113) e pertanto non fanno lavoro. Ad esempio, nel moto circolare, sia esso uniforme o meno, la forza centripeta non fa lavoro.

Se il vincolo non è liscio esiste una componente della reazione tangente al vincolo che dà luogo alla *forza d'attrito*. Essendo la forza di attrito sempre contraria allo spostamento, il lavoro della forza di attrito sarà sempre *negativo* e viene, con altro termine, detto *resistente*.

148 Calcolo del lavoro Se lo spostamento non è infinitesimo ma *finito*, partendo ad esempio dal punto A per finire al punto B, si procederà sommando tanti lavori infinitesimi corrispondenti a degli spostamenti $d\vec{r}_i$ lungo la traiettoria seguita dal punto. Passando al limite avremo un integrale il cui valore in generale dipenderà dal percorso, nonchè ovviamente dai punti di partenza e di arrivo:

$$(58) \quad \mathcal{L}(A, B) = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \rightarrow \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Un tale integrale si dice *integrale di linea* dato che è appunto calcolato sulla linea della traiettoria. E' quindi da attendersi che esso dipenda non solo dalla forza ma anche dalla traiettoria fra A e B.

Nel caso semplice in cui lo spostamento è lungo l'asse x il lavoro si calcolerà quindi come

$$(59) \quad \mathcal{L}(x_i, x_f) = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$

149 Forze dipendenti dalla posizione Una forza si dice *dipendente dalla posizione* o, con altro termine, *posizionale*, se è una funzione *esclusivamente* del punto $P(x, y, z)$: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$. La forza di gravitazione e in particolare la forza peso, la forza di Coulomb, la forza elastica sono tutti esempi di forze dipendenti dalla posizione. Le forze di attrito dinamico dipendono invece anche dalla velocità, essendo sempre opposte ad essa, e non rientrano quindi in questa categoria.

150 Se per una forza dipendente dalla posizione la traiettoria lungo la quale si calcola il lavoro è percorsa in senso inverso, partendo dal punto B per terminare in A, ma seguendo la stessa traiettoria Γ , allora nel calcolo del lavoro la forza rimane immutata mentre tutti gli spostamenti cambiano di segno e così pure il lavoro:

$$\mathcal{L}_\Gamma(A, B) = -\mathcal{L}_\Gamma(B, A)$$

151 Lavoro di una forza costante Se la forza è costante (in modulo, direzione e verso) allora è possibile portarla fuori dall'integrale:

$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

e possiamo notare che in questo caso il lavoro è *indipendente* dalla traiettoria seguita dal punto per spostarsi da A a B. Questo è un risultato molto importante, e vedremo in seguito che esso rimane valido anche per alcune forze *non costanti*.

152 Potenza Si dice *potenza* il lavoro fatto nell'unità di tempo:

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

e \vec{v} è la velocità del punto materiale .

153 Teorema delle forze vive. Energia cinetica Consideriamo adesso il lavoro *totale* fatto dalle forze su un punto materiale . Dato che esso non è altro che il lavoro fatto dalla forza risultante e che proprio quest'ultima determina il moto del punto materiale , possiamo sostituire a $m\vec{a}$ la forza \vec{F} nell'espressione del lavoro infinitesimo:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= m(dv_x v_x + dv_y v_y + dv_z v_z) \\ &= m \left[\frac{1}{2} d(v_x^2) + \frac{1}{2} d(v_y^2) + \frac{1}{2} d(v_z^2) \right] = \\ &= m \frac{1}{2} d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned}$$

La relazione ricavata sopra è un'eguaglianza fra 2 differenziali. Integrando ambo i membri dell'uguaglianza per un punto materiale che si muove da A a B otteniamo il *Teorema delle forze vive*:

$$\mathcal{L}(A, B) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

dove la quantità $\frac{1}{2}mv^2$ prende il nome di *Energia Cinetica* del punto materiale . L'energia cinetica è una grandezza *scalare* sempre positiva (la velocità compare al quadrato e la massa è sempre maggiore di 0). Abbiamo esplicitamente indicato A e B nell'espressione del lavoro, $\mathcal{L}(A, B)$, per ricordare che si tratta del lavoro fatto per spostare il punto materiale da A a B, e che naturalmente dipende dalla traiettoria da esso seguita. L'enunciato del Teorema delle forze vive è:

La variazione di energia cinetica di un punto materiale è uguale al lavoro totale delle forze che agiscono su di esso, *calcolato sulla traiettoria percorsa*

154 Unità di misura del lavoro e dell'energia L'unità di misura del lavoro nel sistema MKS si chiama Joule e si abbrevia J. Se un punto materiale si sposta di 1 m nella direzione e nel verso di una forza di 1 N ad esso applicata, quest'ultima compie il lavoro di 1 J. Dato che il lavoro si trasforma in energia cinetica, anche quest'ultima si misura in Joule.

Nel sistema cgs l'unità di lavoro ed energia è l'erg, che corrisponde a una forza di 1 dyne e a uno spostamento di 1 cm: $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$.

La potenza si misura in Watt (W) nel sistema MKS: $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$, $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$. Non esiste un'unità nel sistema cgs. È d'uso a volte nella pratica utilizzare, come unità di misura del lavoro, il Watt-ora (Wh) o il kilowatt-ora (kWh), che corrisponde a una potenza di 1 o 1000 W erogata per $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$. Quindi ad esempio $1 \text{ kWh} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$. Questa energia costa a noi utenti circa lire 350 (tasse comprese) se la acquistiamo dall'ENEL.

155 Ordini di grandezza La tabella da un'idea di quanto siano i tipici valori dell'energia con cui abbiamo a che fare nella vita di tutti i giorni. I valori riportati per i combustibili sono quelli che si ottengono nella loro combustione; la quantità di energia meccanica o elettrica che da essi si riesce a ottenere vale all'incirca 1/3 (rendimento, di cui si è tenuto conto per la voce (*) nella tabella)). L'energia elettrica si può invece trasformare in meccanica al 95 %.

Esempi (E = Exa = 10^{18})

	J	Wh	Tep (Tonn. equiv. petrolio)
1 tonn. di petrolio	$42 \cdot 10^9$	$11,7 \cdot 10^6$	1
1000 m ³ metano	$32 \cdot 10^9$	$8,89 \cdot 10^6$	0,76
1 tonn. carbone	$29 \cdot 10^9$	$8,06 \cdot 10^6$	0,69
1 barile petrolio (159 l)	$5,7 \cdot 10^9$	$1,6 \cdot 10^6$	0,137
1 litro benzina	$35 \cdot 10^6$	$9,7 \cdot 10^3$	$0,83 \cdot 10^{-3}$
1 pila stilo ricaricabile	$10,8 \cdot 10^3$	3	$0,26 \cdot 10^{-6}$
1 batteria auto 40Ah	$1,73 \cdot 10^6$	480	$42 \cdot 10^{-6}$
1 uomo in 1 giorno	$8,6 \cdot 10^6$	2400	$0,2 \cdot 10^{-3}$
Petrolio estratto in 1 giorno	$0,46 \cdot 10^{18} = 0,46 \text{ E}$	$127 \cdot 10^{12}$	$11 \cdot 10^6$
Consumo Mondo in 1 anno	$440 \cdot 10^{18} = 440 \text{ E}$	$122 \cdot 10^{15}$	$10,6 \cdot 10^9$
Consumo Italia in 1 anno	$8,4 \cdot 10^{18} = 8,4 \text{ E}$	$2,33 \cdot 10^{15}$	$200 \cdot 10^6$
Consumo elettricità Italia in 1 anno	$1,15 \cdot 10^{18} = 1,15 \text{ E}$	$320 \cdot 10^{12}$	$82 \cdot 10^6$ (*)
Sole Italia/k m ² in 1 anno	$6,3 \cdot 10^{15}$	$1,75 \cdot 10^{12}$	$0,15 \cdot 10^6$

156 Se il lavoro fatto dalle forze è positivo l'energia cinetica aumenta. Se è negativo essa diminuisce. Un corpo soggetto alla sola forza di attrito ha la sua energia cinetica in costante diminuzione. Dato tuttavia che l'energia cinetica non può essere negativa, essa potrà diminuire al minimo a zero, il che avviene all'arresto del corpo.

Un corpo che scivola su un piano orizzontale privo di attrito mantiene costante la sua energia cinetica $\frac{m}{2}v^2$ dato che le forze che su di esso agiscono (peso e reazione vincolare normale) sono ortogonali al movimento e quindi non fanno lavoro.

157 Un punto materiale *possiede* energia cinetica ma *non possiede* lavoro. Il lavoro è *sempre svolto dalle forze*. Esso modifica l'energia cinetica posseduta dal corpo.

158 Mentre possiamo distinguere il lavoro fatto separatamente dalle varie forze che agiscono su un corpo, non ha senso voler scomporre l'energia cinetica in componenti distinte: il teorema delle forze vive si applica al moto e al lavoro completo.

159 Forza peso La forza peso è l'esempio più comune di forza costante. Utilizzando la formula del (151) possiamo calcolare il lavoro fatto quando un punto materiale pesante si sposta A a B:

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}(A, B) = -mg(z_B - z_A)$$

il che ci fa vedere esplicitamente che il lavoro *dipende solo dalla differenza di livello fra le posizioni di partenza e di arrivo*.

Il lavoro che fa la forza peso è quindi negativo se il punto materiale sale. Per un corpo lanciato verso l'alto si ha quindi una diminuzione dell'energia cinetica nella fase ascendente. Nella fase di discesa il lavoro è positivo e quindi comporta un aumento dell'energia cinetica del punto.

160 Forze conservative – Energia potenziale Un caso particolare, molto importante nella pratica (lo abbiamo già incontrato calcolando il lavoro della forza peso), si ha quando il lavoro da A a B *non dipende* dal percorso seguito. In tal caso il lavoro per andare da A a B non cambierà se sceglieremo un'altra traiettoria passante per un punto O: il lavoro da A a B sarà quindi uguale al lavoro da A a O *più* il lavoro da O a B:

$$\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{L}(A, O) + \mathcal{L}(O, B) = \mathcal{L}(A, O) - \mathcal{L}(B, O)$$

Se decidiamo di fissare O come punto di riferimento una volta per tutte (nel contesto del problema che stiamo risolvendo) il lavoro $\mathcal{L}(A, O)$ dipenderà solo da A. Pertanto possiamo considerare $\mathcal{L}(A, O)$ una funzione del punto A (o delle sue coordinate x, y, z). Lo stesso vale per B. Questa funzione prende il nome di *energia potenziale* o semplicemente *potenziale* e si indica in genere con la lettera V o U :

$$(60) \quad \begin{aligned} U(A) &= \mathcal{L}(A, O) = -\mathcal{L}(O, A) \\ U(B) - U(A) &= -\mathcal{L}(A, B) \end{aligned}$$

Ribadiamo che perché una forza ammetta l'energia potenziale è **indispensabile che il suo lavoro non dipenda dal percorso seguito**. Un tale tipo di forza si chiama **conservativa**.

161 Calcolo dell'energia potenziale Si parte dalla definizione (60) e si applica la formula (58) o (59) a seconda del caso. Consideriamo il caso più semplice, la forza peso diretta lungo y :

$$(61) \quad U(y) = - \int_{y_0}^y F_y(y') dy' = - \int_{y_0}^y (-mg) dy' = mgy - mgy_0$$

dove y_0 è la coordinata del punto di riferimento O. Possiamo anche scrivere

$$U(y) = mgy + U_0$$

dove $U_0 = mgy_0$ è una costante. Questa costante dipende dalla scelta di O e può essere azzerata scegliendolo in modo che sia $y_0 = 0$. Notiamo quindi che l'energia potenziale può essere positiva o negativa a seconda se $y > 0$ o $y < 0$, a differenza dell'energia cinetica che è sempre positiva. Come vedremo sotto, il valore di U_0 non ha nessuna importanza ai fini pratici dato che ciò che conta sono le **differenze** di energia potenziale e in queste U_0 sparisce.

162 Conservazione dell'energia Supponiamo sempre le forze conservative. Partendo dal teorema delle forze vive (153)

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \mathcal{L}(A, B)$$

e applicando la (60) si ha:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

La formula esprime il principio della **conservazione dell'energia meccanica**: in effetti al primo membro abbiamo la somma di due grandezze che sono calcolate nel punto A (l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv_A^2$ e l'energia potenziale $U(A)$). Al secondo membro le stesse due grandezze sono calcolate in B. Se ripetessimo il calcolo in qualunque altro punto troveremmo la stessa eguaglianza. Affinché ciò si verifichi è necessario quindi che la somma delle due grandezze sia *costante*. Con altro termine diciamo che la somma *si conserva*. Il secondo termine della somma, l'energia potenziale, prende questo nome proprio per analogia con il primo termine della somma, l'energia cinetica. Chiamando E la costante il principio della conservazione dell'energia si scrive:

$$(62) \quad \frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

La dimostrazione testè fatta si è basata sul fatto che il lavoro delle forze fosse indipendente dal percorso. Cadendo l'ipotesi il principio di conservazione dell'energia meccanica cessa di valere. Si chiamano FORZE CONSERVATIVE le forze per le quali il lavoro non dipende dal percorso, e per le quali appunto vale il principio di conservazione dell'energia meccanica.

163 La scelta del punto O può essere del tutto arbitraria e non influisce sul risultato finale. Il suo effetto è quello di modificare il valore dell'energia potenziale U , sommando ad essa un valore costante: $U(A) \rightarrow U(A) + \text{cost.}$. Poiché quello che conta sono le *variazioni* di energia potenziale e la costante scompare nelle differenze i risultati fisici non cambiano. Si dice pertanto che *l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria*. Ci si può valere di questa arbitrarietà per definire, se riesce comodo, il cosiddetto *zero* dell'energia potenziale similmente a come abbiamo fatto nel caso della forza peso.

164 Segno dell'energia Il valore assoluto e il segno dell'energia totale non hanno importanza: infatti essa è somma dell'energia cinetica (sempre > 0) e dell'energia potenziale che, come abbiamo visto, essendo definita a meno di una costante può avere qualunque valore e segno. Ciò che conta sono le **differenze** di energia totale.

165 Lavoro su una traiettoria chiusa In un campo di forze **conservative** il lavoro su una traiettoria chiusa è sempre zero. Per dimostrarlo consideriamo una traiettoria chiusa Γ che comincia e finisce in A. Spezziamola idealmente considerando un punto O sulla traiettoria e chiamiamo Γ_1 la parte di traiettoria da A fino ad O e Γ_2 la parte rimanente che da O ritorna in A (vedi figura). Allora il lavoro per spostarsi da A ad A sulla traiettoria chiusa sarà:

$$\mathcal{L}(A, A) = \mathcal{L}(O, A)_{\Gamma_1} + \mathcal{L}(O, A)_{\Gamma_2} = \mathcal{L}(O, A)_{\Gamma_1} - \mathcal{L}(O, A)_{\Gamma_2}$$

Ma poiché il campo è per ipotesi conservativo, i due lavori a secondo membro sono uguali pur avvenendo su traiettorie diverse, dato che cominciano e finiscono negli stessi punti. Quindi la loro differenza è zero come volevasi dimostrare.

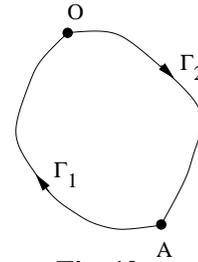


Fig. 19

Questa proprietà delle forze conservative si dimostra più rapidamente osservando che la variazione di energia potenziale V è nulla dato che il punto di partenza e di arrivo coincidono. Pertanto non vi è lavoro nè variazione di energia cinetica: ad esempio, un corpo scagliato verticalmente verso l'alto con una certa velocità \vec{v} , avrà una velocità di *eguale modulo* nel momento in cui tocca il suolo cadendo.

166 Forze centrali Si chiama *forza centrale* ogni forza che (1) è diretta come la congiungente dal punto al centro della forza, e (2) la cui intensità dipende soltanto dalla distanza da detto centro. Essa può essere attrattiva o repulsiva. Una importante forza centrale è la forza di gravitazione (attrattiva), che *decrece* come $1/r^2$ all'allontanarsi dal centro. La forza elettrostatica di Coulomb ha una dipendenza da r come la forza di gravitazione, ma può essere sia attrattiva che repulsiva. La forza elastica è anch'essa una forza centrale attrattiva la cui intensità cresce linearmente con la distanza dal centro.

Dimostriamo ora un teorema molto importante:

le forze centrali sono sempre conservative

Per la dimostrazione cominciamo a osservare quanto segue: dato che la una forza centrale è diretta lungo il raggio vettore, gli spostamenti che avvengono a $r = \text{costante}$ sono sempre ortogonali alla forza. Se quindi il punto si sposta sulla superficie di una ideale sfera la forza non fa lavoro. Consideriamo la figura (20) dove il punto materiale si sposta da A a B seguendo la linea tratteggiata. Approssimiamo la traiettoria con una spezzata di segmenti infinitesimi, spostandoci alternativamente mantenendo $r = r_n = \text{cost}$ (1) e quindi lungo il raggio (2) per passare da r_n a r_{n+1} .

Avverrà che nel calcolo del lavoro totale avremo contributi solo dagli spostamenti (2) lungo il raggio ed è facile rendersi conto che, seguendo un'altra traiettoria ma seguendo la stessa procedura, avremo un contributo, solo dagli spostamenti (2), *uguale a prima*. Il lavoro quindi sarà uguale per le due traiettorie e potendosi ripetere il ragionamento per qualunque traiettoria ne segue che il campo di forza è conservativo.

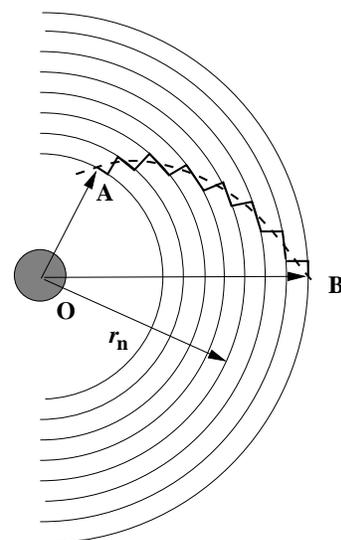


Fig. 20

167 Energia potenziale del campo gravitazionale Per calcolare l'energia potenziale nel campo gravitazionale conviene prendere come punto a energia potenziale zero l'infinito: in tal caso l'energia potenziale si calcolerà come il lavoro fatto dal campo per spostare il punto materiale all'infinito. Dato

che il lavoro è indipendente dal percorso lo possiamo calcolare per lo spostamento più comodo, ossia uno spostamento lungo il raggio. Chiamando per semplicità $k = GM_1M_2$ avremo:

$$U(A) = -k \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -k \frac{1}{r}$$

e la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = E = \text{cost.}$$

Dato che $k > 0$ allora l'energia potenziale è negativa: un corpo avvicinandosi al centro vede l'energia potenziale decrescere (crescendo in valore assoluto), quindi la sua energia cinetica cresce sempre più: il corpo precipita sul centro. Viceversa per un corpo che si allontana l'energia cinetica diminuisce (il corpo rallenta). Se lo si vuole allontanare a grande distanza dal centro attrattore occorre fornirgli un'energia cinetica iniziale elevata, ovvero imprimergli la cosiddetta *velocità di fuga*.

168 Energia potenziale della forza elastica Consideriamo una molla di lunghezza naturale nulla (105) con un estremo fissato nell'origine. Se l'altro estremo si trova in \vec{r} la forza elastica in quel punto secondo la legge di Hooke sarà:

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

Essendo diretta lungo il raggio la forza elastica è una forza centrale e quindi conservativa. Per calcolare l'energia potenziale di una molla allungata di r assumiamo l'origine come punto a potenziale 0. Quindi calcoliamo il lavoro per spostare il punto da A, distante r dall'origine, fino all'origine stessa muovendoci radialmente:

$$U(A) = \mathcal{L}(A, O) = -k \int_r^0 r dr = \frac{1}{2}kr^2$$

Una molla quindi è in grado di immagazzinare dell'energia in modo proporzionale al quadrato dell'allungamento. A parità di allungamento l'energia immagazzinata cresce linearmente con la costante elastica (più la molla è "robusta" e più grande è l'energia potenziale). Questa energia rilasciando la molla si trasformerà in energia cinetica in base alla legge di conservazione:

$$(63) \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = E = \text{costante}$$

169 Molla ideale Notiamo che la (63) è valida per una molla senza massa, altrimenti una parte dell'energia potenziale sarebbe spesa in energia cinetica della molla che si distende. Chiamiamo *molla ideale* una molla senza massa e in mancanza di avviso contrario quando parleremo di molle intenderemo sempre molle **molle ideali**. Una molla ideale è anche priva di attriti interni che altrimenti dissiperebbero parte dell'energia.

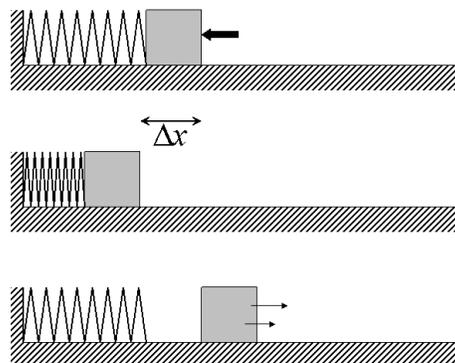


Fig. 21

170 Molla compressa ed allungata La molla immagazzina energia sia in compressione che in estensione. Una molla è caratterizzata da una sua *lunghezza naturale* ℓ_0 (che può anche essere nulla come nell'esempio precedente). In compressione la molla si accorcia ($\Delta x = \ell - \ell_0 < 0$) mentre in estensione si allunga ($\Delta x = \ell - \ell_0 > 0$). In ogni caso l'energia potenziale vale

$$(64) \quad U(\Delta x) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

e quindi non dipende dal segno dell'allungamento. Ne segue che l'energia potenziale è la medesima sia per una molla compressa che per una allungata dello stesso $|\Delta x|$.

171 Consideriamo un blocco di massa m a riposo su un piano orizzontale liscio (Fig. 21). Il blocco viene spinto contro la molla comprimendola di Δx . Si rilascia il tutto e la molla spinge il blocco accelerandolo. La velocità finale del blocco si ottiene eguagliando la sua energia cinetica all'energia potenziale della molla, quindi:

$$(65) \quad v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x$$

172 Trovare le forze dall'energia potenziale Se A e B sono infinitamente vicini per cui lo spostamento da A a B è rappresentato dal vettore infinitesimo $d\vec{r}$ la formula (60) si può mettere nella forma:

$$(66) \quad dU = -d\mathcal{L} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se il problema è a una dimensione possiamo invertire questa formula per trovare la forza noto il potenziale $V(x)$:

$$(67) \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Ad esempio, se $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ troviamo

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dx} = -kx$$

ossia la Legge di Hooke.

Se $U(y) = mgy$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d(mgy)}{dy} = -mg$$

ossia la forza peso.

173 Il Gradiente Se le dimensioni sono 2 o 3 la (66) non può essere invertita in maniera semplice per ottenere il vettore \vec{F} . In questo caso si dimostra che, data l'energia potenziale V in funzione del punto, la forza è calcolabile in base alle formule:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

dove le derivate sono *derivate parziali*, ossia agiscono ciascuna su una coordinata tenendo le altre fisse. Le tre derivate parziali del potenziale sono le componenti di un vettore che prende il nome di **gradiente** dello scalare $U(x, y, z)$. La forza è quindi il gradiente del potenziale cambiato di segno.

Viceversa, se una forza è esprimibile come il gradiente di una funzione, allora questa funzione cambiata di segno è l'energia potenziale (a meno di una costante) e la forza è conservativa.

La verifica si può fare facilmente nei casi già visti, calcolandosi esplicitamente il gradiente dell'energia potenziale con le formule delle derivate parziali. Ovviamente, nel caso a una sola dimensione, il gradiente coincide con la usuale derivata.

174 Lavoro delle forze esterne Consideriamo un sistema conservativo al quale applichiamo una forza esterna al sistema stesso. La suddivisione fra forze esterne e interne è un tantino arbitraria, l'importante è che le forze interne siano conservative. La forza esterna non c'è bisogno che lo sia. Scomponendo il lavoro totale nella somma dei lavori interno ed esterno e applicando il Teorema delle forze vive e la definizione di energia potenziale troviamo che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A, B)_{\text{ext}} &= \mathcal{L}(A, B)_{\text{tot}} - \mathcal{L}(A, B)_{\text{int}} \\ \mathcal{L}(A, B)_{\text{ext}} &= T_B - T_A - \underbrace{\mathcal{L}(A, O)_{\text{int}} - \mathcal{L}(O, B)_{\text{int}}}_{U_B - U_A} = E_B - E_A\end{aligned}\quad (160)$$

cioè il lavoro delle forze esterne va ad incrementare o a diminuire l'energia meccanica totale del sistema.

175 Proprietà generali del moto La conoscenza della funzione energia potenziale permette di ricavare facilmente alcune proprietà generali per il moto di un punto materiale, in base alla sua energia totale E . Dall'equazione $T = E - U(\vec{r})$ si ottiene l'energia cinetica T in ogni punto dello spazio e, dato che essa non può essere negativa, questo significa che le regioni dello spazio per cui $E - U(\vec{r}) < 0$ sono *inaccessibili* alla particella.

Per illustrare meglio questo fatto, consideriamo il caso in cui l'energia potenziale $U(x)$ dipende da una sola coordinata (vedi fig.22). Supporremo dapprima che l'energia del punto valga E_1 . L'energia cinetica è data dalla differenza fra la retta $U = E_1$ e la curva $U(x)$, per cui la particella può muoversi in tutta la regione $x > x_1$. Il punto x_1 , in cui $E_1 = U(x_1)$, si dice *punto d'inversione*. Una particella che proviene da destra rallenta nelle vicinanze di x_1 fino a che la sua velocità si annulla per $x = x_1$. La velocità quindi si inverte di segno e la particella torna indietro.

Se l'energia vale E_2 il punto materiale può muoversi in due regioni: $x_2 < x < x'_2$ e $x > x''_2$. Nella prima il moto è limitato e abbiamo quello che si chiama uno *stato legato*. Nella seconda il punto può allontanarsi all'infinito. I due stati non "comunicano" fra di loro: la particella non può passare dall'uno all'altro dato che la zona $x'_2 < x < x''_2$ è inaccessibile (l'energia cinetica in tale zona sarebbe negativa). Per fare comunicare i due stati la particella deve avere un'energia minima pari a U^* , l'altezza della *barriera energetica*. Parlando di potenziali interatomici questa energia minima viene a volte definita *energia di attivazione*.

Infine se $E = E_3$ esiste solo lo stato legato: la particella oscilla fra i due punti d'inversione $x_3 < x < x'_3$.

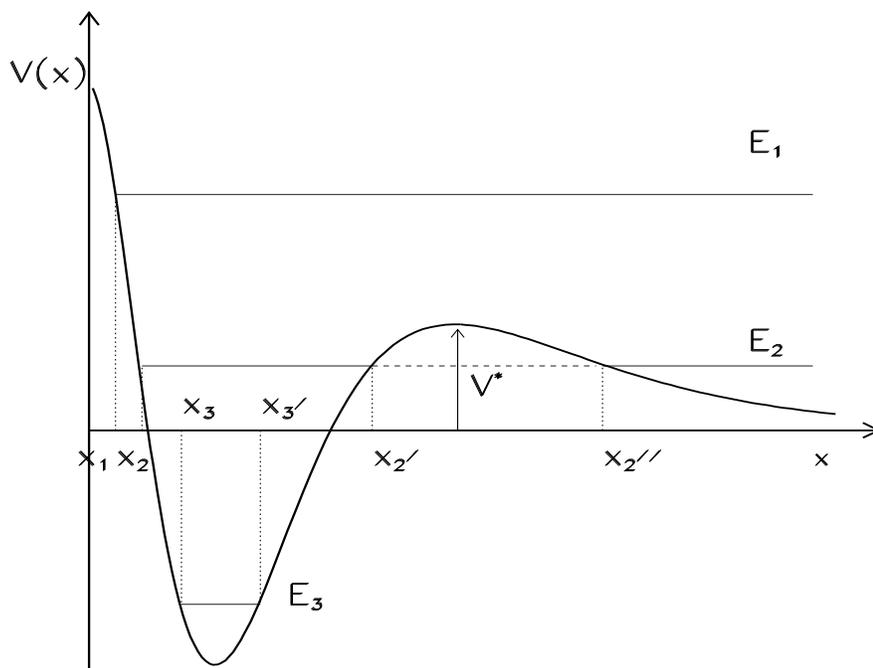


Fig. 22

176 Equilibrio e energia potenziale È facile formulare le condizioni di equilibrio di un punto materiale basandosi sul potenziale. Consideriamo dapprima il caso semplice a una sola dimensione. In (172) abbiamo visto che $F = -dU/dx$. Dato che nella posizione di equilibrio (che chiamiamo x_0) la forza deve annullarsi dovremo avere

$$\begin{aligned} \text{All'equilibrio} &\rightarrow \frac{dU(x_0)}{dx} = 0 \\ &\rightarrow \text{il potenziale ha un MASSIMO O UN MINIMO} \end{aligned}$$

Esaminiamo ora separatamente i due casi di massimo e minimo:

1. **MASSIMO:** In tal caso spostandoci da x_0 $U(x)$ decresce. La sua derivata ha segno opposto a $x - x_0$ (è negativa a destra di x_0 e positiva a sinistra). Pertanto la forza è positiva a destra e negativa a sinistra e tende ad allontanare il punto materiale da x_0 : abbiamo in questo caso *equilibrio instabile*.
2. **MINIMO:** Si ha la situazione opposta, la forza tende sempre a riportare il punto materiale verso x_0 . Abbiamo in questo caso *equilibrio stabile*

Matematicamente la condizione di minimo si traduce nel fatto che la *derivata seconda* del potenziale è positiva: $U''(x_0) > 0$.

Si visualizzano facilmente le due condizioni di equilibrio disegnando l'energia potenziale $U(x)$ e immaginando che la funzione rappresenti un profilo (liscio) sul quale si può muovere

liberamente un punto materiale pesante. La quota a cui si trova il punto ci dà, moltiplicata per mg , la sua energia potenziale. I minimi di U sono degli avvallamenti e sono quindi punti di equilibrio stabile. I massimi sono invece punti di equilibrio instabile.

Nel caso generale a 3 dimensioni resta vera l'affermazione che punti di equilibrio stabile sono quelli di minimo del potenziale, mentre sono instabili quelli di massimo.

177 L'energia potenziale di una molla, $\frac{1}{2}kx^2$ (**168**), ha un solo minimo pertanto un punto materiale attaccato a una molla è sempre in equilibrio stabile.

Un caso di energia potenziale con massimi e minimi si ha nel caso del pendolo. Per un pendolo costituito da una massa m situata all'estremità di un'asta lunga ℓ (e priva di massa) l'energia potenziale vale (ci limitiamo a considerare l'intervallo $-\pi \leq \theta \leq \pi$):

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

che ha ovviamente un minimo per $\theta = 0$ (dove $U = 0$) e due massimi per $\theta = \pm\pi$ (dove $U = 2mg\ell$). La posizione di minimo, con la massa in basso, è quindi quella di equilibrio *stabile*. Le posizioni di massimo corrispondono alla situazione in cui la massa si trova invece *sopra* il punto di sospensione, ove l'equilibrio è *instabile*.

178 Potenziali interatomici nelle molecole

Nelle molecole biatomiche la forza che lega i due atomi è ovviamente nulla nella loro posizione di equilibrio. Si tratta quindi di una forza che attrae i due atomi a grandi distanze ma che li respinge quando si trovano molto vicini. Dato che le forze interatomiche sono conservative esse ammettono un'energia potenziale, che ha qualitativamente l'andamento mostrato in figura. Il minimo di U corrisponde appunto alla situazione di equilibrio della molecola. Il moto degli atomi intorno alla posizione di equilibrio è quindi di tipo oscillatorio, e dà luogo ai *livelli di energia vibrazionali* della molecola.

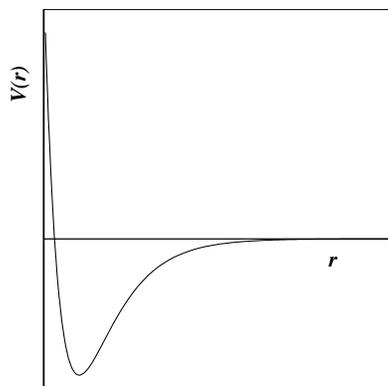


Fig. 23

179 Sistemi non inerziali Nei sistemi di riferimento non inerziali il teorema delle forze vive è ancora valido purché si tenga conto nel calcolo del lavoro il contributo delle forze apparenti. Di queste, la forza di Coriolis non compie lavoro, essendo il vettore $\vec{\omega} \times \vec{v}'$ perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento. La forza centrifuga è invece una forza posizionale e conservativa, ammettendo quindi un potenziale detto *potenziale centrifugo*.

Capitolo VI

Moto oscillatorio

180 Moto periodico Un altro tipo di moto importante è il *moto periodico*, di cui abbiamo in natura innumerevoli esempi. Il moto periodico è un moto che si ripete uguale a sè stesso dopo un intervallo di tempo detto *periodo*. Per un moto a 1 grado di libertà lungo la coordinata x la definizione di moto periodico di periodo T è:

$$x(t) = x(t + T)$$

Il moto periodico è quindi un *moto oscillatorio*, dato che il punto nel suo moto ripassa sempre per i luoghi già occupati in precedenza.

181 Per ovvie ragioni un moto periodico deve necessariamente durare da $t = -\infty$ a $t = \infty$. Naturalmente questa è un'astrazione, ma se nel tempo in cui noi studiamo il fenomeno contiene un gran numero di periodi allora l'astrazione è lecita.

182 Moto armonico Il caso più semplice di moto periodico è quello *armonico* che ha la seguente semplicissima legge oraria:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

dove A , ω e φ sono delle costanti. Le dimensioni delle costanti sono: $[A] = [L]$, $[\omega] = [T]^{-1}$ mentre φ è un numero puro e non ha dimensioni. Questo moto è periodico perché, per le proprietà delle funzioni trigonometriche, esso si ripete dopo il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La costante A è positiva e si chiama *ampiezza* del moto in quanto $-A \leq x(t) \leq A$. La costante ω si chiama *pulsazione* e si misura in rad/s. Infine φ si chiama *fase iniziale* del moto, in quanto al tempo $t = 0$ abbiamo $x(0) = A \sin(\varphi)$ e la misureremo in radianti.

183 Frequenza La *frequenza* del moto armonico è l'inverso del periodo: $\nu = 1/T$. Essa è pari al numero di oscillazioni che vi sono in 1 secondo, e viene misurata in Hz. $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

184 Un moto del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \psi)$$

è anch'esso armonico dato che è identico a

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

in cui poniamo $\phi = \psi + \pi/2$.

185 Se il moto di un punto può rappresentarsi come la somma di due (o più) moti periodici le cose si complicano. Limitandoci a 2 moti, se

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

la condizione affinché il moto sia periodico è che dopo un certo tempo T esso si ripeta. Questo significa che deve aversi $\omega_1 T = 2n\pi$ e insieme $\omega_2 T = 2m\pi$ (n e m sono due interi qualunque) ovvero:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1}$$

ossia le 2 pulsazioni (o i 2 periodi) devono stare fra loro in un rapporto *razionale*. Se ciò non avviene, ad esempio se $T_1 = \sqrt{2}T_2$, il moto risultante non è periodico.

186 Come possiamo classificare il moto $x(t) = A \sin^2(\omega t + \phi)$? A prima vista possiamo dire che si tratta di un moto periodico in quanto certamente si ripete dopo $T^* = 2\pi/\omega$. Se guardiamo meglio, usando la relazione

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

possiamo scriverlo come:

$$x(t) = \frac{A - \cos 2(\omega t + \phi)}{2}$$

e quindi vediamo che $x(t) - A/2$ è un moto armonico con $T = \pi/\omega$.

187 Velocità nel moto armonico La velocità del punto si ottiene derivando x rispetto a t :

$$v(t) = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

e si vede che dove lo spostamento in valore assoluto è massimo la velocità si annulla. Viceversa la velocità massima in valore assoluto si ha per $x = 0$. La velocità del moto armonico oscilla anch'essa, rimanendo compresa fra gli estremi $-A\omega$ e $A\omega$.

188 Equazione del moto armonico Derivando la velocità, ovvero derivando due volte la legge oraria (65), otteniamo l'accelerazione:

$$a(t) = \dot{v} = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

dove abbiamo usato il fatto che $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. Il moto armonico soddisfa quindi all'*equazione differenziale*:

$$(68) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

nota appunto come “equazione del moto armonico” o “equazione dell'oscillatore armonico”. In questo caso siamo partiti da una soluzione generale e siamo arrivati a ottenere l'equazione differenziale a cui essa soddisfa. Viceversa, *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico sono del tipo $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. Tutte le volte che incontreremo tale equazione sapremo quindi scriverne immediatamente le soluzioni.

189 La forza elastica Consideriamo una particella di massa m che si muove di moto armonico. Vogliamo vedere qual è la forza che dà luogo a tale tipo di moto. Moltiplicando l'eq. (68) per m e usando la Legge di Newton si ha:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx$$

dove abbiamo posto $k = m\omega^2$. Quindi la forza è data da:

$$(69) \quad F = -kx$$

Questa è la *legge di Hooke* (49) in una dimensione, pertanto possiamo dire che la forza causa del moto armonico è quella esercitata da una molla.

Viceversa, ogni molla che esercita su un corpo di massa m una forza elastica con costante elastica k dà luogo a un moto armonico con

$$(70) \quad \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

190 In 3 dimensioni la forza elastica si scrive come

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

L'equazione di un oscillatore armonico in tre dimensioni corrisponde a tre identiche equazioni per le componenti (x, y, z) del vettore spostamento. Dato che il moto di ciascuna di esse è armonico, anche il moto dovuto alla forza elastica in tre dimensioni è un moto armonico.

191 Energia dell'oscillatore armonico Per quanto si è detto l'energia dell'oscillatore armonico è semplicemente quella di un punto materiale attaccato a una molla (63). La riscriviamo qui

$$(71) \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{costante}$$

192 Costanti e condizioni iniziali Per definire le costanti A e ω necessitano due equazioni che, ad esempio, si ottengono imponendo al tempo $t = 0$ le condizioni sulla posizione e la velocità del punto:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A \sin \varphi \\ v_0 &= v(0) = A \omega \cos \varphi \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\omega x_0}{v_0} \\ A^2 &= x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

193 Come nel caso del moto uniformemente accelerato, l'esistenza di 2 costanti nell'equazione della legge oraria è legata alla necessità di specificare la posizione e la velocità del punto a un determinato istante, che abbiamo preso come $t = 0$. Si tratta di una proprietà generale della meccanica dei punti materiali: il movimento di un punto è determinato, una volta risolte le equazioni del moto, dalla sua posizione e velocità a un dato istante di tempo (in genere l'istante iniziale).

194 Il pendolo Il pendolo di Galileo è un caso speciale di oscillatore armonico in cui la forza di richiamo è di tipo elastico anche se non vi è una molla.

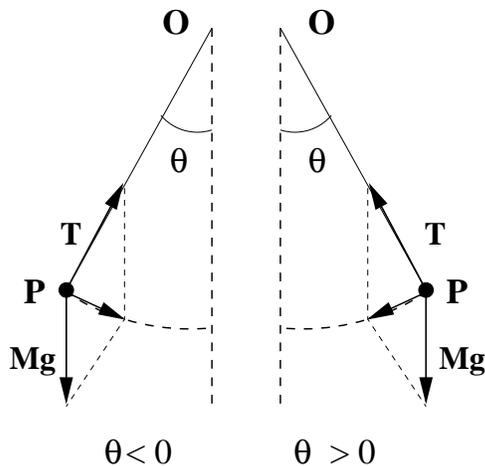


Fig. 24

Un filo ideale e privo di massa fissato in O porta appeso un punto materiale P di massa M (vedi fig. 24). Sappiamo dall'esperienza che P oscilla rispetto alla verticale, mantenendo teso il filo. Galileo trovò che per piccole oscillazioni (definiremo dopo che significa *piccole*) il periodo delle oscillazioni non dipende dalla loro ampiezza nè dalla massa M . Vogliamo trovare l'equazione di movimento del pendolo.

Dato che il filo è teso il pendolo si muove su un arco di circonferenza il cui raggio non è altro che la lunghezza del filo, ℓ . Ma affinché ciò avvenga dovrà esservi una forza di reazione vincolare \vec{R} che, componendosi col

peso $M\vec{g}$, dia una risultante *tangente* all'arco di circonferenza. Tale forza è trasmessa al punto P dal filo che costituisce appunto il vincolo e quindi può solo essere diretta lungo il filo da P verso O. La sua intensità T è la tensione del filo medesimo.

In figura abbiamo rappresentato due posizioni del pendolo. Una sola variabile, l'angolo θ , è sufficiente a descrivere la posizione. A sinistra abbiamo dei valori di $\theta < 0$, e a destra > 0 . Per scrivere le forze usiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con l'origine in P, l'asse y diretto da P verso O e l'asse x tangente alla traiettoria e orientato nella direzione di θ crescenti. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} F_x &= -Mg \sin \theta \\ F_y &= T - Mg \cos \theta \end{aligned}$$

La componente F_x dovrà essere uguale alla massa per l'accelerazione tangenziale, che vale in coordinate polari $\ell \ddot{\theta}$. Pertanto avremo

$$(72) \quad \begin{aligned} M \ell \ddot{\theta} &= -Mg \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{aligned}$$

Per determinare il moto del pendolo è sufficiente questa sola equazione.

195 Tensione del filo Per quanto riguarda F_y , osserviamo che essa dev'essere uguale alla forza centripeta, ossia: $m\ell \dot{\theta}^2$. Essa determina quindi la tensione del filo:

$$T = Mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2$$

Una volta risolto il moto del pendolo tramite la (72) (vedi oltre), questa equazione ci permette quindi di conoscere la tensione del filo in ogni istante t o per qualunque posizione θ del pendolo.

196 Piccole oscillazioni L'equazione (72) non contiene più la massa M : questo è sufficiente per dire che il moto (e quindi il suo periodo) deve essere indipendente da M come effettivamente osservato. Tuttavia l'equazione differenziale non è risolvibile con metodi elementari. Nel caso di piccole oscillazioni invece si ha la semplice equazione del moto armonico. Infatti se θ espresso in radianti è piccolo possiamo fare l'approssimazione:

$$\sin \theta \simeq \theta$$

Risulta allora l'equazione dell'oscillatore armonico (68) con $\omega = \sqrt{g/\ell}$ per cui il periodo vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

che mostra come il periodo non dipenda dall'ampiezza delle oscillazioni.

197 Notiamo che il segno “-” nell'equazione (72) appena scritta è importantissimo dato che:

1. Se il pendolo è a sinistra ($\theta < 0$) l'accelerazione è positiva: infatti:
 - se il pendolo si muove verso destra (velocità positiva) esso tende a accrescere la sua velocità avvicinandosi alla verticale
 - se invece si muove verso sinistra (velocità negativa) esso tende sempre ad accrescere la sua velocità, che essendo negativa crescendo si riduce in modulo allontanandosi dalla verticale
2. Se il pendolo è a destra ($\theta > 0$) l'accelerazione è negativa: infatti:
 - se il pendolo si muove verso destra (velocità positiva) esso tende a diminuire la sua velocità allontanandosi dalla verticale
 - se invece si muove verso sinistra (velocità negativa) esso tende ancora a diminuire la sua velocità, che essendo negativa diminuendo cresce in modulo avvicinandosi alla verticale

Il segno “-” non lo abbiamo imposto noi: è venuto fuori in maniera automatica (e corretta) scegliendo il sistema di coordinate e scrivendo i passaggi in maniera coerente. Siccome però la scelta è arbitraria, si consiglia di provare con una scelta diversa (ad esempio contando gli angoli in senso orario o scegliendo l'orientazione opposta per l'asse x) per rendersi conto che alla fine i risultati non devono cambiare.

198 Energia del pendolo Il modulo della velocità del pendolo è dato da $v = \ell \dot{\theta}$ per cui l'energia cinetica vale

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Quanto all'energia potenziale, possiamo esprimerla come mgh dove h è l'altezza di cui si solleva il pendolo a un determinato angolo θ :

$$U = mgl(1 - \cos \theta)$$

per cui la conservazione dell'energia si esprime come:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = E$$

Se l'ampiezza di oscillazione è piccola si può approssimare

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

ottenendo

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E$$

come per l'oscillatore armonico (71) se si sostituisce $x = \ell\theta$.

199 Oscillazioni qualsiasi Per chi avesse la curiosità di sapere la formula esatta del periodo del pendolo, per un'ampiezza arbitraria α_0 delle oscillazioni, la riportiamo qui sotto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \times \left[1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2(\alpha_0/2) + \frac{(1 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 4)^2}\sin^4(\alpha_0/2) + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2}\sin^6(\alpha_0/2) + \dots \right]$$

Si può vedere che occorre un'ampiezza di ben 23° perché la formula semplificata sia in errore di appena l'1 %. In altre parole, se con la formula approssimata calcoliamo che in un certo intervallo di tempo dovremo contare 100 oscillazioni, nella realtà ne osserveremo 99. L'errore cala rapidamente con α_0 .

200 Moto armonico intorno ai punti di equilibrio stabile Consideriamo una particella che si trova inizialmente in una posizione di equilibrio stabile, cioè in una posizione x_0 di minimo di energia potenziale, e spostiamola leggermente. In moltissimi casi le funzioni energia potenziale ammettono uno sviluppo in serie intorno ai minimi per cui, per uno spostamento $x - x_0$ l'energia potenziale si può scrivere come:

$$V(x) \approx \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

$U''(x_0)$ è la derivata seconda del potenziale calcolata nel punto di equilibrio e quindi è una costante positiva. Sostanzialmente ciò significa che intorno al minimo la funzione che rappresenta l'energia potenziale è ben approssimata da una parabola. In questa regione l'energia potenziale è quindi uguale a quella di una molla di costante elastica $k = U''(x_0)$ e di allungamento $\Delta\ell = x - x_0$. Pertanto il moto di una particella nelle vicinanze di un minimo è sempre armonico, con pulsazione

$$(73) \quad \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

In pratica, si riconosce che abbiamo un moto armonico quando l'energia potenziale è *quadratica* nella coordinata.

Capitolo VII

Dinamica dei sistemi di punti

201 La dinamica dei sistemi di punti è formalmente un'estensione di quella del punto materiale singolo. Il moto di ciascuna particella sarà determinato dalla risultante complessiva delle forze che si esercitano su di essa. Queste forze potranno in genere dividersi in due categorie: quelle *esterne*, ossia che si originano al di fuori del sistema di punti (ad esempio la forza peso) e quelle *interne*, dovute alla presenza di tutte le altre particelle. È chiaro che la maggior complicazione nel risolvere il problema del moto dipende proprio dalle forze interne, dato che esse variano continuamente di intensità e direzione in base non solo in virtù del moto della particella sotto esame ma anche del mutar della posizione di tutte le altre particelle del sistema. Nonostante l'estrema complessità del problema (sottolineiamo che non esiste una soluzione analitica del moto nemmeno per un sistema di sole tre particelle!) si possono ricavare tuttavia delle proprietà generali importanti per la dinamica dei sistemi di punti in base a principi primi.

202 Prima Equazione Cardinale Il primo approccio alla soluzione delle equazioni del moto consiste nello scrivere la Legge di Newton (**80**) per ciascuno degli N punti che costituiscono il sistema:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i$$

dove \vec{F}_i è la forza che agisce sulla i -esima particella, e poi sommare su tutti i punti da entrambi i membri

$$(74) \quad \sum m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum \vec{F}_i$$

Notiamo che possiamo scrivere il primo membro come

$$\frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

dove \vec{P} è la quantità di moto totale del sistema, ovvero la somma di tutte le quantità di moto delle particelle

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

per cui la (74) si scriverà come

$$(75) \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

203 Forze interne ed esterne Le forze che agiscono su un sistema si dividono in

- *forze interne*: sono quelle che le particelle del sistema esercitano fra loro. In un gruppo di persone sono le forze che si esercitano fra di esse e all'interno di ciascuna persona sono le forze fra le molecole della stessa. In un liquido sono le forze interatomiche ecc.
- *forze esterne*: tutte le altre. Ad esempio il peso che si esercita su ogni molecola del liquido, o che agisce sulle persone.

e quindi matematicamente

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum \vec{F}_i^{\text{est}}$$

Ma in virtù del Principio di azione e reazione (112) e prendendo tutte le possibili coppie di particelle, si ricava facilmente che **la risultante delle forze interne è nulla** e quindi queste non contribuiscono alla risultante che si può calcolare utilizzando solo le forze esterne.

204 La Prima Equazione Cardinale Tenendo conto del fatto che le forze interne non contribuiscono potremo infine scrivere

$$(76) \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\text{est}} = \vec{F}_{\text{TOT}}$$

Questa equazione prende il nome di *Prima Equazione Cardinale* della dinamica dei sistemi di punti ed è, se vogliamo, l'analoga della Legge di Newton per il punto materiale. Naturalmente non possiamo attenderci che, riducendoci a una sola equazione rispetto alle N di partenza, la Prima Equazione Cardinale descriva completamente il moto di un sistema di punti. In effetti vedremo che questa equazione descrive il moto di un punto speciale chiamato *baricentro* del sistema.

205 Sistemi isolati Consideriamo un *sistema isolato* di punti materiali, ossia un sistema sul quale non si esercitano forze esterne per cui $\vec{F}_{\text{TOT}} = 0$. Allora in base alla Prima Equazione Cardinale la quantità di moto totale si conserva:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{costante}$$

Si tratta di un risultato assai importante, che vale per qualunque sistema isolato: potrebbe trattarsi del sistema solare, o di una galassia o di una molecola di gas. La sola condizione è che si possano trascurare tutte le influenze esterne.

206 Centro di massa o baricentro Il centro di massa (o baricentro) di un sistema di punti materiali è individuato dal vettore:

$$(77) \quad \vec{R}_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

In termini di componenti

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad Y_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad Z_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

In pratica si tratta di una *media pesata* con le masse dei raggi vettori dei singoli punti. La derivata $d\vec{R}_{CM}/dt$ rappresenta la velocità del centro di massa, che chiameremo \vec{V}_{CM} . In definitiva la quantità di moto totale di un sistema di punti può esser scritta:

$$(78) \quad \vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

dove abbiamo indicato con $M = \sum m_i$ la massa totale del sistema di punti materiali. In pratica possiamo fare l'analogia fra un sistema di punti e una particella singola

- alla massa della particella corrisponde la massa totale del sistema
- alla velocità della particella corrisponde la velocità del suo baricentro

207 Moto del baricentro Utilizzando $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$ possiamo mettere la Prima Equazione Cardinale anche nella forma seguente che esplicita il raggio vettore del baricentro \vec{R}_{CM} :

$$(79) \quad M\dot{\vec{V}}_{CM} = M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{TOT}$$

Se abbiamo a che fare con un sistema isolato (assenza di forze esterne, $\vec{F}_{TOT} = 0$) \vec{V}_{CM} è costante: il baricentro di un sistema isolato si muove quindi di moto rettilineo uniforme.

Nel caso i punti siano *pesanti* la forza esterna che agisce su di essi è la forza peso: $\vec{F}_i^{ext} = m_i\vec{g}$. Dato che \vec{g} è una costante, la risultante della forza peso è semplicemente data da $\vec{F}_{tot} = \vec{g}\sum m_i = \vec{g}M$ dove M è la massa totale del sistema di punti. In questo caso il baricentro del corpo fa in generale un moto parabolico esattamente come una singola particella pesante.

208 Calcolo del baricentro Per calcolare il baricentro si fa uso della (77) scegliendo nel modo più conveniente l'origine delle coordinate. In Fig. 25 vediamo l'esempio di calcolo per un sistema di due masse. Abbiamo scelto l'asse x lungo la congiungente delle due masse, per cui $y_{CM} = 0$. Per il momento supponiamo che le masse siano puntiformi.

Dovendo calcolare il baricentro di un sistema si può:

- dividere il sistema in sottosistemi;
- calcolarsi i baricentri \vec{R}_i dei vari sottosistemi, di massa \mathcal{M}_i ;
- trattando ogni sottosistema come un punto di massa \mathcal{M}_i situato in \vec{R}_i calcolarsi il baricentro totale.

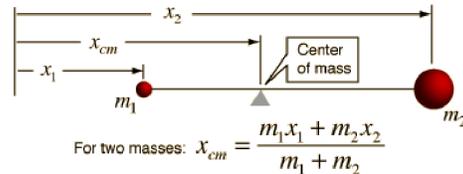


Fig. 25

Si vede quindi che il caso di Fig. 25 si applica anche se le due masse non sono puntiformi, purché si prendano come coordinate x_1, x_2 quelle dei loro baricentri.

209 Caso di sistemi continui In sistemi continui di punti materiali (caso particolare i corpi solidi) la formula di (206) dev'essere modificata per tenere conto del fatto che il numero di punti può essere considerato infinito. Le somme dovranno quindi essere sostituite da integrali in cui dm rappresenta un elemento di massa del corpo:

$$(80) \quad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

e per componenti

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm \quad Y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int y dm \quad Z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int z dm$$

210 Una sbarretta sottile e omogenea Per ragioni di simmetria il centro di massa sarà nel centro della sbarretta, quindi se la sbarretta è lunga L il baricentro sarà a $L/2$ da un estremo. Possiamo comunque calcolarlo utilizzando la formula (80) assumendo l'asse x nella direzione della sbarretta e l'origine a una estremità della stessa. Se la sbarretta è sottile potremo introdurre la **densità lineare**:

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

Avremo quindi

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

Se la sbarretta è omogenea $\lambda = \text{cost.} = M/L$ (L è la lunghezza della sbarretta). In tal caso abbiamo

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \frac{M}{L} \int_0^L x dx = \frac{L}{2}$$

211 Una lamina sottile a forma di triangolo rettangolo Per il calcolo vedi testo.

212 Riferimento del centro di massa Spesso risulta conveniente porsi in un riferimento "solidale" col sistema di particelle che si vuole studiare. Qui per "solidale" intendiamo un riferimento nel quale il nostro sistema di punti sia "in media" fermo e, per dare un significato preciso a questa frase, intenderemo che in tale riferimento la quantità di moto totale sia nulla.

Il sistema di riferimento che gode di tale proprietà si chiama *riferimento del centro di massa*: esso ha origine nel CM stesso, e quindi, per definizione essendo in esso il CM a riposo, la quantità di moto totale del sistema $\sum m_i \vec{v}'_i = \sum \vec{p}'_i$ è zero. Applicando le leggi di trasformazione per le velocità la quantità di moto di un singolo punto può essere espressa come

$$(81) \quad \begin{aligned} \vec{p}_i &= m_i \vec{v}'_i + m_i \vec{V}_{\text{CM}} = \\ &= \vec{p}'_i + \frac{m_i}{M} \vec{P}_{\text{CM}} \end{aligned}$$

dove \vec{p}'_i è la quantità di moto che il punto possiede *nel sistema del baricentro*. Inoltre terremo presente per il futuro che in tale riferimento il vettore $\sum m_i \vec{r}'_i$ è identicamente nullo, essendo proporzionale al vettore posizione del CM che nel riferimento del CM si trova nell'origine!

Determinare il moto del CM è abbastanza semplice dato che la Prima equazione cardinale lo riconduce al problema di un punto materiale soggetto a una forza (la risultante delle forze esterne). Una volta fatto questo, un approccio molto usato consiste nel cercare di risolvere il moto del sistema di punti nel riferimento del CM. Se il CM si muove di moto accelerato, dovremo considerare che oltre alle forze reali (sia interne che esterne) nel suo riferimento saranno presenti anche le *forze apparenti* $\vec{F}_i^{\text{app}} = -\sum m_i \vec{A}_{\text{CM}}$ (141).

213 Energia cinetica - Teorema di Koenig L'energia cinetica di un sistema di punti è una grandezza *additiva* che quindi si ottiene addizionando le energie cinetiche di tutti i punti

del sistema. Essa si può scomporre in due parti distinte usando il **teorema di Koenig** che qui sotto dimostriamo:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \sum m_i [(\vec{V}_{\text{CM}})^2 + 2\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}'_i + (\vec{v}'_i)^2] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum m_i V_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v'_i{}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v'_i{}^2
 \end{aligned}$$

in quanto la somma $\sum m_i \vec{v}'_i = 0$ (**212**). Possiamo quindi dire che l'energia cinetica totale di un sistema di punti è la somma di due parti:

1. l'energia cinetica del CM considerato come un punto materiale di massa M e velocità \vec{V}_{CM} e
2. l'energia cinetica del movimento *interno* al sistema del CM, costituita dalla somma di tutte le energie dei singoli punti calcolate nel riferimento del CM stesso.

214 Conservazione dell'energia meccanica Il teorema delle forze vive è valido anche per un sistema. Se le forze sono conservative ne segue il teorema di conservazione dell'energia (cinetica più potenziale). In tal caso l'energia potenziale è data dalla somma delle energie potenziali V_i di tutte le particelle del sistema. Osserviamo che l'energia potenziale V_i di una generica particella del sistema dipenderà in generale dalla posizione di tutte le altre e quindi trovarne l'espressione esplicita non è semplice.

Osserviamo ancora che, pur essendo nulla la risultante delle forze interne, *non è nulla la risultante delle forze su una singola particella*, pertanto durante l'evoluzione del sistema le forze interne in generale compiono lavoro. Il lavoro delle forze interne è zero solo se le distanze reciproche dei punti materiali del sistema non cambiano, cosa che avviene nei cosiddetti *corpi rigidi*.

Capitolo VIII

Urti fra particelle

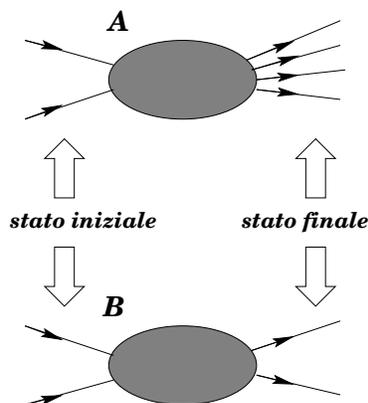


Fig. 26

istantaneo per l'osservatore esterno).

In seguito all'urto si possono verificare quattro diverse situazioni:

1. le stesse 2 particelle riemergono nello stato finale, con velocità ovviamente diverse da quelle dello stato iniziale. Esempi:
 - collisione di due palle da biliardo
 - collisione di due protoni: $p + p \rightarrow p + p$
 - collisione di un protone con un neutrone: $p + n \rightarrow p + n$
2. il risultato dell'urto è quello di “frantumare” la particelle creandone di nuove, di modo che nello stato finale possono comparire più particelle che nello stato iniziale. A livello di oggetti macroscopici è ovvio cosa la frantumazione significhi. Per una frantumazione microscopica si pensi a un urto fra due atomi in seguito al quale uno viene ionizzato emettendo un elettrone.
3. le particelle nello stato finale sono sempre 2 ma diverse da quelle iniziali. Esempi microscopici:
 - ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$ (fusione nucleare)
 - $\text{NO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_2 + \text{O}_2$
4. le due particelle si “fondono” e una sola emerge dalla collisione.

216 Si conserva la quantità di moto Se il sistema di particelle in collisione è isolato la sua quantità di moto si conserva. In pratica, dato che l'urto ha in genere una durata brevissima, possiamo assumere la conservazione della quantità di moto *durante la collisione* anche in presenza di forze esterne. La conservazione dell'energia meccanica non è invece garantita. Gli urti si dividono quindi in due categorie:

217 Urti elastici Sono quelli in cui l'energia meccanica si conserva. Un esempio che conosciamo è la collisione di due palle da biliardo.

218 Urti anelastici Sono quelli in cui l'energia meccanica non si conserva. Questo è il caso che si presenta più di frequente: ad esempio parte dell'energia può essere convertita in calore e dissipata, o può essere utilizzata per rompere un legame fra atomi. Un incidente fra due auto è un urto anelastico in cui l'energia viene dissipata per deformare e ammaccare le carrozzerie.

In meccanica relativistica l'energia può anche essere usata per creare la massa di nuove particelle ($E = mc^2$!), e tal caso massa ed energia non si conservano separatamente ma insieme: $E + \sum m_i c^2 = \text{cost.}$

219 Da quanto detto è chiaro che possono essere elastici solo gli urti in cui le particelle nello stato finale sono le stesse che in quello iniziale. La condizione però ovviamente non è sufficiente.

Scrivendo l'energia cinetica del sistema utilizzando il teorema di Koenig si ha:

$$T = \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

ma siccome la quantità di moto totale del sistema si conserva e la massa totale rimane immutata allora il primo termine della somma non può cambiare durante l'urto. Quindi solo il secondo termine, T' , che rappresenta l'energia cinetica interna del sistema, può cambiare e ciò avviene appunto se l'urto è anelastico.

220 Urti a 2 corpi Ci limitiamo da ora a studiare gli urti nei quali abbiamo due corpi nello stato iniziale. In tal caso per descrivere il moto di entrambi nel CM basta utilizzare il vettore **velocità relativa**:

$$\vec{u} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$$

Notiamo che, essendo \vec{u} differenza di due vettori, possiamo calcolarlo nel sistema di riferimento che più ci fa comodo. In effetti, cambiare sistema di riferimento aggiungerebbe alle due velocità la velocità di trascinamento (56), che scompare nella differenza.

Dato che nel CM $m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$ possiamo esprimere le due velocità in termini della sola \vec{u} :

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}$$

e quindi l'energia cinetica interna prende la forma semplice:

$$(82) \quad T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u^2 = \frac{1}{2} \mu u^2$$

dove abbiamo indicato con μ la cosiddetta *massa ridotta* del sistema: $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. L'urto elastico si ha quindi se e solo se l'energia interna dello stato finale T_f' è uguale a quella nello stato iniziale T_i' . Perché ciò avvenga occorre che le masse e il *modulo* della velocità relativa non cambino nella collisione.

Se invece $u_f \neq u_i$ l'urto sarà anelastico. Se $u_f = 0$ abbiamo la massima dissipazione di energia meccanica: nello stato finale le due particelle hanno velocità relativa nulla, "fondendosi" in una sola di massa $m = m_1 + m_2$. Questa unica particella viaggerà allora nel laboratorio con la velocità \vec{V}_{CM} dal momento che in essa si trova il CM del sistema.

221 Urti elastici in una dimensione In questo caso le particelle prima e dopo l'urto si muovono tutte nella stessa direzione. Possiamo immaginare che scorrano lungo un binario. Un simile caso si può verificare se una palla da biliardo che si muove ne urta una ferma e la direzione di moto della prima passa per il centro della seconda. In tal caso si ha un *urto centrale o collineare*, che si svolge tutto lungo la direzione di moto.

222 Dato che abbiamo una sola direzione possiamo scegliere l'asse x lungo questa direzione e ragionare solo con le componenti delle velocità. Per questo motivo non metteremo le freccette sui simboli delle medesime. Si consiglia di fare attenzione agli indici:

- i, f caratterizzano lo stato iniziale e finale
- 1, 2 distinguono le 2 particelle.

223 Per risolvere il problema dell'urto centrale elastico scriveremo la conservazione della quantità di moto

$$(83) \quad \overbrace{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}^{\text{iniziale}} = \overbrace{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}^{\text{finale}}$$

e quindi

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

e dell'energia

$$(84) \quad \overbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2}^{\text{iniziale}} = \overbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2}^{\text{finale}} \quad \text{da cui}$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

Dividendo membro a membro l'ultima riga della (84) per l'ultima della (83) otteniamo

$$(85) \quad v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

Combinando la (85) con la (83) otteniamo finalmente:

$$v_{1f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Nel caso particolare in cui la particella 2 è **inizialmente a riposo** ($v_{2i} = 0$) il risultato diventa

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

In questa situazione iniziale distinguiamo tre casi particolari:

- a) $m_1 = m_2$ (per esempio due palle da biliardo). In tal caso $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v_{1i}$ ossia la prima particella si arresta e la seconda parte con la velocità iniziale della prima;
- b) $m_1 \gg m_2$. Si ha $v_{1f} \approx v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ ossia la prima particella (pesante) continua imperturbata mentre la seconda (leggera) parte a velocità doppia;
- c) $m_1 \ll m_2$. Si ha $v_{1f} \approx -v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 0$ ossia la prima particella (leggera) rimbalza all'indietro (e la sua velocità non cambia in modulo) mentre la seconda (pesante) non si muove.

224 Che è successo alla velocità relativa? Sappiamo che in urto elastico la velocità relativa non cambia in modulo. Nel caso precedente la velocità relativa iniziale vale

$$u_i = v_{1i} - v_{2i} = v_{1i}$$

Vediamo quanto vale la velocità relativa finale $v_{1f} - v_{2f}$ nei 3 sottocasi:

- a) $u_f = -u_i$
- b) $u_f = -u_i$
- c) $u_f = -u_i$

cioè in tutti i casi la velocità relativa in seguito all'urto è semplicemente cambiata di segno.

225 Urti completamente anelastici in una dimensione Questo caso è più semplice da trattare di quello elastico. Le 2 particelle si fondono in una sola e si conserva solo la quantità di moto.

$$\overbrace{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}^{\text{iniziale}} = \overbrace{(m_1 + m_2) V_f}^{\text{finale}} \quad \text{da cui}$$

$$V_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

dove V_f è la velocità finale della particella composta.

Quanto vale l'energia dissipata nell'urto? La risposta si ottiene semplicemente calcolando l'energia cinetica finale e sottraendola da quella iniziale. Nel caso particolare in cui 2 è inizialmente a riposo otteniamo

$$(86) \quad E_i - E_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \mu u_i^2$$

dove abbiamo usato il fatto che la velocità relativa iniziale $u_i = v_{1i}$. Se confrontiamo il risultato con la (82) vediamo che in effetti abbiamo dissipato tutta l'energia cinetica possibile, quella disponibile nel centro di massa del sistema (T').

226 Meglio tamponare o essere tamponati? Come esempio di urto totalmente anelastico consideriamo un tamponamento fra un camion e un'auto. È interessante notare che l'energia dissipata dipende solo dalla velocità relativa dei due mezzi prima dell'urto: non vi è quindi differenza se l'auto tampona il camion fermo o il camion tampona l'auto ferma se la velocità del mezzo in movimento è la stessa nei due casi.

Questo è del tutto naturale in base al principio di relatività di Galileo, dato che quel che conta è la velocità relativa dei due veicoli. Il risultato vale anche se entrambi i mezzi sono in moto: conta solo la velocità relativa.

227 Urti elastici nel piano Gli urti elastici sono caratterizzati dal fatto che nel sistema del CM \vec{u} si limita a mutare direzione o verso. Una volta nota \vec{u}_f si possono trovare le velocità finali delle particelle sia nel CM che nel laboratorio. Un caso particolarmente semplice è quello degli urti cosiddetti *collineari*, in cui nel laboratorio la particella 2 è ferma e dopo l'urto sia 1 che 2 muovono nella direzione che aveva 1 prima dell'urto. In tal caso \vec{u} non cambia direzione ma solo verso, quindi $\vec{u}_f = -\vec{u}_i$.

Un altro caso semplice si ha se le 2 particelle in collisione hanno **uguale massa** e 2 è inizialmente ferma: allora nel sistema del laboratorio le equazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia si scrivono:

$$\vec{v}_1^i = \vec{v}_1^f + \vec{v}_2^f$$

$$(v_1^i)^2 = (v_1^f)^2 + (v_2^f)^2$$

L'uguaglianza dei vettori si rappresenta graficamente come un triangolo (vedi figura), e la conservazione dell'energia mostra che il triangolo dev'essere rettangolo. Quindi le direzioni delle particelle 1 e 2 dopo la collisione formano fra loro un angolo retto. Si osserva sperimentalmente questo fenomeno, ad esempio, quando un neutrone in movimento urta un protone fermo.

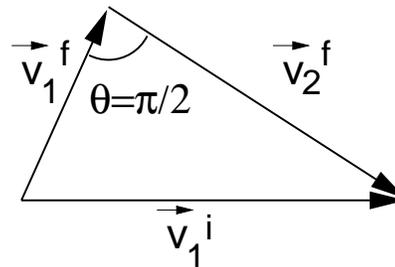


Fig. 27

In questo caso, se chiamiamo α l'angolo di cui è deviata la particella 1, vediamo dalla figura facilmente che le velocità delle due particelle **dopo l'urto** è data in modulo da:

$$v_1^f = v_1^i \cos \alpha$$

$$v_2^f = v_1^i \sin \alpha$$

Si deve notare che la particella incidente dopo l'urto ha la sua energia cinetica diminuita nel sistema del laboratorio. Un neutrone quindi che traversa la materia si trova a perdere continuamente energia cinetica e rallenta: si dice anche che si *modera*.

228 Il razzo Il razzo funziona in virtù del principio di conservazione della quantità di moto. Tutto si svolge come nel caso di disintegrazione di una particella pesante in due più leggere. Consideriamo un razzo di massa M , che viaggia lungo l'asse x con velocità V . Il razzo ha quindi una quantità di moto MV . Se ora il razzo eietta una massa dm di gas di scarico con velocità *relativa al razzo* $-u$ lungo x , la quantità di moto totale resterà la stessa dato che il sistema razzo+gas è isolato. La quantità del moto del razzo sarà data dal prodotto della sua

massa (diminuita di quella dm del gas di scarico), per la velocità dopo l'eiezione, $V + dV$. La quantità del moto del gas sarà invece $dm (V - u)$. Potremo quindi scrivere che:

$$M V = (V - u) dm + (V + dV) (M - dm) \approx -u dm + M dV + M V$$

(abbiamo trascurato il prodotto $dV dm$)

Ne segue che $dV = u dm/M$. Questa equazione va integrata tenendo conto che la massa del razzo varia da un massimo M_i (alla partenza) fino a M_f (quando tutto il carburante è stato espulso). Per integrare si terrà conto che $dm = -dM$, per cui si ha alla fine:

$$V_f = u \ln \frac{M_i}{M_f}$$

Come esempio, il razzo Saturno V del programma Apollo, aveva le seguenti caratteristiche per il primo stadio:

$$\begin{aligned} m &= 2.5 \cdot 10^6 \text{ kg} \\ u &= 3000 \text{ m/s} \\ \text{massa espulsa} &= 1.6 \cdot 10^4 \text{ kg/s} \\ \text{tempo di accensione} &= 2 \text{ min} \end{aligned}$$

per cui si ricava $V_f = 15780 \text{ km/h}$.

Capitolo IX

Momento angolare

229 Dato un punto materiale, si definisce *momento angolare* o *momento della quantità di moto* rispetto al polo O il vettore:

$$\vec{\ell} = (\vec{r} - \vec{R}_O) \times \vec{p}$$

Il vettore \vec{R}_O specifica il polo O. Il polo può essere *fisso* o *mobile*. Per il momento consideriamo solo il caso del polo fisso e scegliamolo come origine. In tal caso:

$$(87) \quad \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Possiamo calcolarci la legge di variazione del momento angolare derivando ambo i membri della (87) e usando la legge di Newton:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Il pezzo $\vec{v} \times \vec{p}$ è zero dato che sono due vettori paralleli. Rimane a secondo membro dell'equazione la quantità $\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F}$, detta *momento della forza*, per cui:

$$(88) \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Se quindi il momento della forza è nullo il momento angolare si conserva: $\vec{\ell} = \text{costante}$.

230 Forze centrali Un caso notevole è quello delle forze centrali, in cui la forza è diretta lungo il raggio vettore. Allora il momento della forza è identicamente nullo dato che il prodotto vettoriale di \vec{r} e di \vec{F} che sono paralleli è zero. Per tutte queste forze il momento angolare è conservato.

231 Moto circolare uniforme Come primo esempio prendiamo una particella che si muove di moto circolare uniforme su un cerchio di raggio R e calcoliamo il momento angolare usando come polo il centro del cerchio. $\vec{\ell}$ è diretto normale al piano del cerchio, orientato come il vettore velocità angolare, e di modulo $mRv = mR^2\omega$. Pertanto possiamo scrivere vettorialmente:

$$\vec{\ell} = mR^2 \vec{\omega}$$

In questo caso il momento angolare è costante come ci aspettavamo essendo la forza centrale.

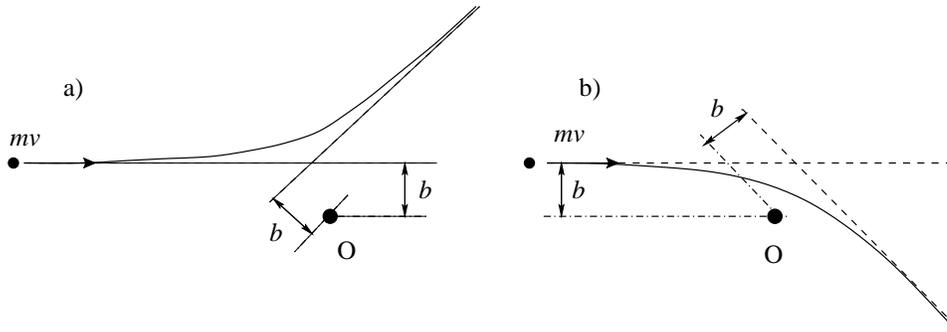


Fig. 28

232 Orbite planetarie Nelle orbite planetarie, che come sappiamo sono delle ellissi, la conservazione del momento angolare si traduce nel fatto che l'area spazzata dal raggio vettore è costante. Questo spiega come mai al Solstizio d'inverno, quando la Terra è alla minima distanza dal Sole (perielio), la sua velocità lungo l'orbita è massima, mentre è minima al Solstizio d'estate, quando la distanza è massima (afelio). La conservazione del momento angolare corrisponde quindi alla II Legge di Keplero.

233 Urto contro un centro fisso Come secondo esempio consideriamo una particella che viaggia parallelamente all'asse x a grande distanza dall'origine delle coordinate, in cui si trova il centro di forza. Nella fig. 28 abbiamo presentato due casi: in a) la forza è repulsiva come potrebbe avvenire nella collisione fra due protoni (cariche uguali si respingono): in b) la forza è invece attrattiva come potrebbe avvenire per una cometa che si avvicina al Sole.

In entrambi i casi a grande distanza la particella ha velocità v e la sua traiettoria è una retta che passa a una certa distanza b dal centro. Il momento angolare è quindi dato da:

$$(89) \quad \ell = m v b = p b$$

La particella viene deflessa dal campo di forza e la sua velocità varia. In a) la velocità diminuisce, essendo la forza repulsiva, quindi per conservare il momento angolare la particella deve allontanarsi "lateralmente" da O fino a che non ha raggiunto il punto d'inversione. Dopo aver superato il punto d'inversione la velocità cresce di nuovo e traiettoria di uscita, pur ad un angolo diverso da quella iniziale, dista ancora b da O . Nel punto d'inversione il momento angolare si scrive come: $m R_0 v_0$: abbiamo quindi una relazione che lega R_0 e v_0 . Dato che una seconda relazione si ottiene dalla conservazione dell'energia è possibile determinare entrambe le grandezze senza risolvere le equazioni del moto.

In b) la velocità aumenta e quindi la particella tende ad avvicinarsi "lateralmente" a O per mantenere ℓ costante, ma a parte i dettagli il fenomeno è esattamente lo stesso che abbiamo visto nel caso di forza repulsiva.

234 Meccanica quantistica Il momento angolare ha grande importanza in meccanica quantistica. La ragione è che si tratta di una grandezza "quantizzata", ossia multipla intera della costante di Planck divisa per 2π :

$$(90) \quad \ell = n \frac{h}{2\pi} \quad (n \text{ intero})$$

Il “quanto” di momento angolare (“acca tagliato”) vale:

$$(91) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

Per avere un’idea della sua piccolezza calcoliamo il momento angolare di una massa di $1 \mu\text{g}$ che si muove con velocità 1 m/s su un cerchio di raggio $1 \mu\text{m}$: $\ell = 10^{-15} \text{ Js}$. Questo equivale a $n \approx 10^{19}$! Solo per i sistemi atomici il numero di quanti è basso. Nella meccanica classica il numero di quanti è talmente elevato che si può trattare il momento angolare come una variabile “continua”, ossia una variabile che può assumere qualsiasi valore.

235 Seconda Equazione Cardinale Il momento angolare è una grandezza additiva; per un sistema di punti materiali esso è la somma di tutti i momenti angolari di essi:

$$(92) \quad \vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Derivando \vec{L} rispetto al tempo otteniamo la cosiddetta *seconda Equazione Cardinale*:

$$(93) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{K}_{\text{TOT}}$$

Al momento risultante $\vec{K}_{\text{TOT}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ contribuiscono tutte le forze che agiscono sui punti, tuttavia in virtù del principio di azione e reazione il momento totale delle forze *interne* è identicamente nullo, pertanto le forze interne non contribuiscono alla variazione di \vec{L} nel tempo. Questo è analogo a quello che abbiamo visto per la Prima Equazione Cardinale (204).

236 Sistemi isolati Dato che in un sistema isolato le forze esterne sono per definizione nulle, così è pure il loro momento \vec{K}_{TOT} . Pertanto il momento angolare di un sistema isolato si conserva.

237 Scomposizione del momento angolare Consideriamo il moto della Terra intorno al Sole. Se trattiamo la Terra come un punto materiale il cui raggio vettore è quello del baricentro della Terra, il suo momento angolare sarà dato da:

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}}$$

In questo modo abbiamo del tutto trascurato il fatto che la Terra deve avere un momento angolare supplementare per il fatto che ruota su sè stessa. Il modo corretto di procedere è di riscrivere la (92) esprimendo le quantità di moto \vec{p}_i e i raggi vettori \vec{r}_i tramite i loro valori nel riferimento del CM (212):

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}'_i + \vec{R}_{\text{CM}} \\ \vec{p}_i &= \vec{p}'_i + \frac{m_i}{M} \vec{P}_{\text{CM}} \end{aligned}$$

Sviluppando il prodotto vettoriale otteniamo

$$(94) \quad \vec{L} = \sum \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i + \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}} = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}}$$

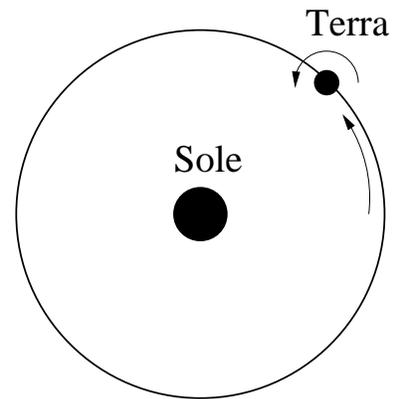


Fig. 29

Per ottenere questa equazione abbiamo usato il fatto che nel riferimento del CM

$$\sum \vec{r}'_i = 0 \quad \sum \vec{p}'_i = 0$$

L'equazione (94) ha un chiaro significato fisico: il momento angolare è costituito dalla somma di un componente *orbitale* (il termine $\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}}$) e di un componente *interno* o *intrinseco* che rappresenta il momento angolare dovuto al moto del sistema nel suo CM. Nel caso della Terra la prima parte dà il contributo del moto di rivoluzione intorno al Sole (per questo si chiama *orbitale*) e il secondo contiene l'effetto della rotazione diurna della Terra. Nel caso di un elettrone in orbita dentro un atomo \vec{L}_{CM} corrisponde allo *spin*, \vec{S} .

238 Derivando l'equazione (94) rispetto al tempo la II Equazione Cardinale si spezza in due parti distinte:

$$(95) \quad \begin{aligned} \frac{d(\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}})}{dt} &= \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{TOT}} \\ \frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} &= \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{K}'_{\text{TOT}} \end{aligned}$$

Come si vede la variazione del momento angolare orbitale è quella che si avrebbe per un punto materiale soggetto al momento della sola risultante di tutte le forze (e quindi per definizione di tutte le forze *esterne* in virtù del principio di azione e reazione (**112**)).

Per quanto riguarda il momento angolare intrinseco, bisogna considerare il momento delle forze calcolato nel CM, $\vec{K}'_{\text{TOT}} = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$.

239 Forze apparenti Nel caso che il CM compia un moto accelerato il sistema di riferimento non è inerziale. Ci si può quindi domandare se nel calcolo del momento delle forze rispetto al CM occorra includere anche le forze apparenti $\vec{F}_i^{\text{app}} = -\sum m_i \vec{A}_{\text{CM}}$ (**141**). La risposta è che non è necessario: infatti il momento delle forze apparenti rispetto al CM è identicamente nullo, come si può facilmente dimostrare (vedi sotto l'analogo caso della forza peso).

240 Campo della forza peso Se un sistema di corpi si trova nel campo della forza peso, in cui le forze sono proporzionali alle masse dei singoli corpi e hanno tutte la stessa direzione e verso, allora queste forze hanno sempre momento nullo rispetto al CM. In effetti

$$(96) \quad \begin{aligned} \vec{K}'_{\text{TOT}} &= \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{g} \\ &= (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{g} = 0 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue da quanto è stato detto in (**212**). Ne deriva ad esempio che per un corpo pesante che cade \vec{L}_{CM} rimane costante.

241 Scelta del polo Facciamo notare che nel caso generale il valore dei momenti dipende dalla scelta del polo. È quindi opportuno scegliere il polo in maniera da rendere più semplice la soluzione del problema.

242 Sistemi di forze a risultante nulla Se un sistema di forze ha *risultante nulla* allora il momento totale di dette forze è indipendente dalla scelta del polo. Infatti:

$$\begin{aligned}\vec{K}_O &= \sum (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{R}_Q + \vec{R}_Q - \vec{R}_O) \times \vec{F}_i = \\ &= \sum (\vec{r}_i - \vec{R}_Q) \times \vec{F}_i + \underbrace{(\vec{R}_Q - \vec{R}_O) \times \sum \vec{F}_i}_{=0 \text{ in quanto } \sum \vec{F}_i = 0} = \vec{K}_Q\end{aligned}$$

Questo teorema è specialmente importante quando si studiano casi di equilibrio, dato che in essi la risultante delle forze dev'essere comunque nulla. Permette quindi di scegliersi il polo che si ritiene più comodo per i calcoli.

Capitolo X

Dinamica dei corpi rigidi

243 Si chiamano *corpi rigidi* degli insiemi di punti materiali le cui distanze relative sono invariabili nel tempo. La posizione e l'orientamento di un corpo rigido sono completamente descritte da 6 variabili: ad esempio, le 3 coordinate del CM e tre angoli che specificano l'orientamento del corpo nello spazio. Se il corpo rigido è costituito da punti materiali allineati (esempio: una sbarra sottile, una molecola biatomica) allora bastano 5 variabili in tutto.

Lo studio del moto di un corpo rigido pertanto può affrontarsi studiando successivamente (I) il moto del CM e (II) la rotazione del corpo medesimo rispetto al CM stesso.

244 Equazioni del moto Sono la Prima (204) e la Seconda Equazione Cardinale (235). Trattandosi di due equazioni vettoriali esse equivalgono a sei equazioni scalari, quindi sufficienti a determinare il moto del corpo rigido che, come abbiamo visto, ha solo sei gradi di libertà.

Ne consegue che il moto di un corpo rigido è determinato univocamente se si conosce la risultante delle forze esterne e il momento risultante delle forze esterne. Il moto del corpo non cambierà se sostituiremo il sistema di forze con uno *equipollente*, che ha cioè la medesima risultante e il medesimo momento risultante. In particolare potrà essere utile sostituire il sistema di forze con una forza e con una coppia appropriate (ossia la forza deve avere intensità pari alla risultante e la coppia momento pari al momento risultante).

245 Moto rotatorio intorno a un asse fisso Se la rotazione avviene attorno a un asse fisso il problema si semplifica enormemente. In tal caso il problema ha un solo grado di libertà, l'angolo di rotazione attorno all'asse. Nel resto di questo capitolo ci occuperemo di questo tipo di moto. Nel capitolo seguente vedremo il caso del *rotolamento*, un moto in cui l'asse di rotazione si muove.

Dato che esiste un solo grado di libertà ci si può domandare a che servono due equazioni cardinali. Ovviamente le loro soluzioni non potranno essere indipendenti. Se l'asse di rotazione passa per il baricentro è ovvio che quest'ultimo è fisso, per cui la Prima Equazione Cardinale avrà come soluzione $\vec{R}_{CM} = 0$. La Seconda Equazione ci fornirà l'angolo di rotazione $\theta = \theta(t)$. Se l'asse non passa per il baricentro quest'ultimo farà un moto rotatorio intorno all'asse e la Prima Equazione avrà questa soluzione. La Seconda ci fornirà ancora l'angolo $\theta(t)$ da cui potremmo facilmente determinare la rotazione del baricentro senza bisogno della Prima Equazione. Ne segue che per trovare la soluzione del moto sarà sufficiente la sola Seconda Equazione Cardinale.

246 Velocità nel moto rotatorio Il moto intorno all'asse di ogni punto che costituisce il corpo rigido è ovviamente un moto circolare (66, 67) per il quale abbiamo definito la velocità

angolare ω . Se l' i -esimo punto si trova a una distanza r_i dall'asse di rotazione la sua velocità

- sarà contenuta in un piano perpendicolare all'asse di rotazione
- avrà modulo $v_i = \omega r_i$

Secondo le nostre convenzioni la velocità angolare prende il segno positivo se la rotazione avviene in senso antiorario, negativo se in senso orario, rispetto all'osservatore che guarda lungo l'asse.

247 Momento d'inerzia Per scrivere la II Equazione Cardinale abbiamo bisogno di una relazione che leghi il momento angolare all'angolo di rotazione. Per fissare le idee prendiamo un sistema di coordinate con l'asse z lungo l'asse di rotazione, immaginiamo il corpo scomposto in particelle di massa m_i , e consideriamo la componente L_z del momento angolare.

Come abbiamo appena detto in (246) la velocità \vec{v}_i dei punti che compongono il corpo giace in un piano normale all'asse e vale in modulo $v_i = \omega r_i$ (r_i è la distanza dall'asse), per cui

$$(97) \quad L_{z,i} = m_i r_i^2 \omega$$

Sommando su tutti i punti e ricordando che $\omega = d\theta/dt$:

$$(98) \quad L_z = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega = I \dot{\theta}$$

La grandezza $I = \sum m_i r_i^2$ si chiama *momento d'inerzia* del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione. Essa dipende dalla massa e dalla forma del corpo, nonché dalla scelta dell'asse. La (98) stabilisce la relazione cercata fra il momento angolare e l'angolo di rotazione, o meglio la sua derivata temporale. Dato che la componente del momento angolare è quella lungo l'asse di rotazione si parla anche di *momento assiale della quantità di moto o momento angolare assiale*.

248 II Equazione cardinale per il corpo rigido Siamo adesso in grado di formulare la II Equazione cardinale nel caso di rotazione attorno a un asse fisso (asse z):

$$(99) \quad \begin{aligned} K_z &= \frac{dL_z}{dt} \\ K_z &= I \ddot{\theta} = I \alpha \end{aligned}$$

dove K_z è la componente lungo z del momento totale delle forze esterne mentre α è l'accelerazione angolare. La soluzione di questa equazione ci permette di determinare la dinamica rotazionale del corpo rigido. Come abbiamo anticipato, essendovi un solo grado di libertà, una sola equazione basta. Pertanto non ci occuperemo delle altre componenti del momento angolare.

Se il momento della forza è costante il risultato molto semplice è che l'accelerazione angolare è anch'essa costante. Un esempio di momento costante è quello applicato dai ceppi dei freni alla ruota di un vagone ferroviario. Se la forza di attrito vale F_a il suo momento sarà semplicemente $F_a R$. La decelerazione angolare della ruota sarà quindi

$$\alpha = -\frac{F_a R}{I}$$

(il segno meno ci ricorda che parliamo di **d**ecelerazione).

249 Energia di rotazione Il momento d'inerzia entra anche nella formulazione dell'energia cinetica associata alla rotazione del corpo. Questa dipende quadraticamente dalla velocità angolare ω . In effetti, tenendo presente che $v_i = \omega r_i$, otteniamo:

$$(100) \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

E' facile ricordarsi che il momento d'inerzia entra sia nella definizione di momento angolare che in quella di energia cinetica. Tuttavia si deve stare attenti a non fare confusione. Può aiutare la seguente corrispondenza mnemonica fra punto materiale e corpo rigido in rotazione:

$$\begin{aligned} m &\iff I \\ v &\iff \omega \\ p = mv &\iff I\omega = L \\ \frac{1}{2}mv^2 &\iff \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned}$$

250 Il momento d'inerzia è *additivo*: ossia se si suddivide il corpo in molte parti, il momento totale è la somma dei momenti delle varie parti. Quindi il momento d'inerzia di una massa m che ruota a distanza R intorno a un asse è semplicemente

$$I = mR^2$$

251 Ruota sottile Una ruota sottile possiamo schematizzarla come un insieme di masse m disposte su un cerchio. Ognuna contribuisce con mR^2 . Sommando tutti contributi

$$I = \sum mR^2 = MR^2$$

252 Ruota piena Il calcolo si può fare sommando i momenti d'inerzia di tante ruote sottili una dentro l'altra. Rimandiamo al libro di testo per il calcolo che richiede un integrale. Il risultato è per una ruota di massa M e raggio R :

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

253 Asta sottile Sia L la lunghezza dell'asta e M la sua massa. Rispetto a un asse che passa per un estremo:

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

254 Teorema di Huygens-Steiner Si chiama anche *Teorema degli assi paralleli*. I momenti d'inerzia I, I' rispetto a due assi paralleli tra loro, dei quali il primo è un asse passante per il CM ovvero *centrale*, sono legati dalla relazione:

$$(101) \quad I' = I + MD^2$$

dove D è la distanza fra gli assi ed M la massa del corpo. Per la dimostrazione si rimanda al libro di testo.

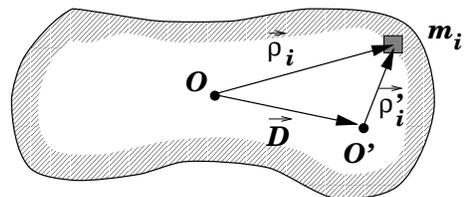


Fig. 30

255 Asta sottile Per trovare il momento d'inerzia di un'asta sottile rispetto a un asse che passa per il centro partendo dal valore (253) si utilizza il Teorema di Huygens-Steiner (254) formula per trovare

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} M L^2$$

256 Momenti d'inerzia delle molecole Si usa spesso considerare le molecole come corpi rigidi. Si tratta di un'approssimazione dato che la distanza interatomica nella realtà non è costante a causa delle oscillazioni molecolari.

Ogni molecola è quindi caratterizzata dal suo momento d'inerzia. Se la molecola ha una simmetria gli assi principali d'inerzia hanno la stessa simmetria. Ad esempio, se la molecola ha un *piano di simmetria* il baricentro della molecola si troverà sul piano stesso. Allora due assi principali si trovano sul piano e il terzo è perpendicolare al piano.

Un caso particolare è quello della molecola lineare. Per questa il momento d'inerzia I_3 rispetto all'asse della molecola è zero. Gli altri due momenti d'inerzia sono uguali e valgono

$$(102) \quad I_1 = I_2 = I = \sum_i m_i z_i^2$$

257 Livelli di energia di rotazione Consideriamo una molecola, che ruota attorno ad un asse principale. Allora $L = I \omega$. Sostituendo nella (100) abbiamo

$$(103) \quad E = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{L^2}{2I}$$

La quantizzazione del momento angolare (234) impone che sia $L = n\hbar$, per cui abbiamo

$$(104) \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2I}$$

Questa è la formula per i *livelli rotazionali* delle molecole ¹. Sostituendo i numeri e paragonando i livelli energetici rotazionali con i livelli atomici si vede che i valori sono molti ordini di grandezza inferiori. Questo corrisponde al fatto che gli *spettri rotazionali* sono situati nell'infrarosso.

258 Assi e momenti principali d'inerzia Si deve tener ben presente che il momento angolare assiale è solo una delle 3 componenti di \vec{L} e che in generale non sussiste la proporzionalità fra i *vettori* \vec{L} e $\vec{\omega}$ (ossia in questo caso, pur essendo $\omega_x = \omega_y = 0$, si può avere $L_x \neq 0, L_y \neq 0$). La proporzionalità si ha solo nel caso di un corpo rigido a forma di sfera, mentre per un solido qualunque la relazione fra la velocità angolare e il momento angolare è in genere complicata e variabile nel tempo.

Si dimostra tuttavia che per un generico corpo rigido, e dato un qualunque punto P, esistono sempre almeno tre assi del corpo (passanti per P) lungo i quali $\vec{\omega}$ e \vec{L} sono paralleli e proporzionali: $\vec{L} = I_j \vec{\omega}$, $j = 1, 2, 3$ I coefficienti I_j sono i *momenti d'inerzia* rispetto a tali assi. Tali assi si chiamano *assi principali d'inerzia* e, se passanti per il CM, si dicono *centrali*.

259 Corpo pesante girevole intorno a un asse fisso orizzontale Per risolvere la II Equazione Cardinale ci serve il momento totale delle forze esterne lungo l'asse. Tali forze sono (1) la forza peso e (2) la reazione vincolare dell'asse. Quest'ultima per definizione passa per l'asse stesso e quindi ha momento nullo. Per calcolare il momento della forza peso prendiamo z

¹In realtà la formula quantistica esatta prevede $n(n+1)$ al posto di n^2 , ma la differenza è piccola.

lungo l'asse di rotazione e y sia l'asse verticale (diretto verso l'alto). Abbiamo

$$\begin{aligned}
 K_z &= \sum x_i F_{iz} \\
 &= -(\sum x_i m_i) g \\
 (105) \quad &= -M X_{CM} g \\
 &= -Mg d \sin \theta
 \end{aligned}$$

In pratica quindi il calcolo si effettua come se avessimo un punto materiale di massa pari alla massa totale del corpo, localizzato nel baricentro che si trova a distanza d dall'asse (vedi figura 31).

Il momento della forza peso quindi non è costante ma dipende dalla posizione del corpo tramite l'angolo θ . Notiamo che se $\theta > 0$ il momento è giustamente negativo, dato che provoca una rotazione in senso orario (negativa). Viceversa se $\theta < 0$ il momento provoca una rotazione positiva in senso antiorario. Risulta dall'eq. (105) che se l'asse è situato sulla verticale del baricentro ($\theta = 0$), il momento della forza peso si annulla. Se sospendiamo quindi un corpo rigido per un punto, lasciandolo libero di ruotare, esso si porterà nella posizione di equilibrio ed il baricentro si troverà sulla verticale condotta sotto il punto di sospensione. Se ora sospendiamo il corpo per un secondo punto O' e lo lasciamo equilibrare, il baricentro si troverà sulla verticale di O' . Dovendosi il baricentro trovare lungo le due rette, necessariamente sarà situato nell'intersezione delle due. Questo è un metodo per determinare sperimentalmente la posizione del baricentro di un corpo rigido qualunque.

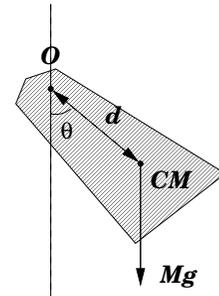


Fig. 31

260 Pendolo fisico Il cosiddetto *pendolo fisico* è semplicemente un corpo rigido pesante di forma qualunque che è incernierato e libero di ruotare attorno a un asse orizzontale.

Utilizzando la II Equazione Cardinale in cui inseriamo il momento della forza peso (105) abbiamo l'equazione del pendolo fisico:

$$I \ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta$$

Per angoli piccoli questa si riduce a

$$(106) \quad \ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I} \theta$$

che non è altro che l'equazione dell'oscillatore armonico (68) con $\omega = \sqrt{Mgd/I}$. La conseguenza è quindi un moto armonico con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

261 Se per esempio il pendolo è costituito da un'asta sottile appesa a un'estremità abbiamo

$$I = M\ell^2/3$$

$$d = \ell/2$$

(107)

per cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

262 Problemi di urto. Pendolo balistico Il cosiddetto *pendolo balistico* serve a misurare la velocità di un proiettile. Questo viene sparato contro un pendolo fisico a riposo. Il proiettile si conficca nel pendolo che inizia ad oscillare. L'energia cinetica iniziale del proiettile viene ricavata misurando l'altezza massima che il pendolo raggiunge.

L'urto è certamente anelastico dato che una parte dell'energia del proiettile si dissipa. Cosa si può dire sul moto del pendolo dopo l'urto?

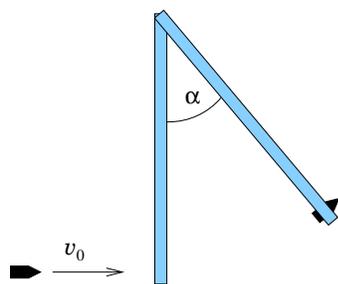


Fig. 32

Non possiamo utilizzare la conservazione della quantità di moto dato che non siamo in presenza di un sistema isolato (l'asse del pendolo è fisso) e inoltre c'è anche la forza peso. Di quest'ultima potremmo ignorare l'effetto, essendo l'urto istantaneo ed avendo tale forza un valore finito (216), ma la reazione vincolare esercitata dall'asse per non fare scappar via il pendolo può (per definizione reazione vincolare) assumere valori elevatissimi durante l'urto e quindi non è lecito trascurarla.

Notiamo invece che il momento angolare si conserva: possiamo infatti trascurare il momento della forza peso durante il tempo infinitesimo dell'urto mentre la reazione vincolare ha momento nullo rispetto all'asse. Potremo quindi scrivere che $L_{zi} = L_{zf}$. Siccome la traiettoria iniziale del proiettile passa a una distanza ℓ dal polo abbiamo semplicemente:

$$\text{Momento angolare iniziale: } L_{zi} = mv_0\ell$$

(positivo in quanto l'asse z è diretto verso di noi e il proiettile viene da sinistra). Il sistema composto pendolo+proiettile dovrà necessariamente quindi mettersi in rotazione e il suo momento angolare avrà (appena dopo l'urto) il valore

$$L_{zf} = (I + m\ell^2)\omega$$

dove $I + m\ell^2$ è il momento d'inerzia del sistema composto costituito dalla somma del momento del pendolo I e del momento d'inerzia del proiettile che si è conficcato a distanza ℓ dall'asse e vale pertanto $m\ell^2$.

Ne viene pertanto la seguente relazione fra la velocità angolare e la velocità del proiettile

$$\omega = \frac{m\ell v_0}{I + m\ell^2}$$

Se il pendolo è una sbarra sottile di massa M $I = M\ell^2/3$ per cui

$$\omega = \frac{3m}{M + 3m} \frac{v_0}{\ell}$$

263 Che succede alla quantità di moto? Abbiamo detto all'inizio che la quantità di moto non si conserva. Controlliamo se è vero. Prima dell'urto $P_i = mv_0$. Subito dopo l'urto il proiettile ha velocità $v_f = \omega \ell$ ossia

$$v_f = \frac{3m}{M+3m} v_0$$

mentre il CM del pendolo (situato nel centro dell'asta ossia a distanza $\ell/2$ dall'asse) ha una velocità $V_f = \omega \ell/2 = v_f/2$. Pertanto la quantità di moto totale finale vale

$$P_f = mv_f + M \frac{v_f}{2} = P_i \frac{3(2m+M)}{2(3m+M)}$$

e quindi $P_f > P_i$ (lo studente dovrebbe verificarlo almeno in qualche caso particolare). Se avessimo applicato la conservazione della quantità di moto avremmo ottenuto un risultato sbagliato.

264 Paradosso? Il fatto che $P_f > P_i$ potrebbe apparire paradossale dato che ciò significa una forza di reazione dell'asse rivolta nel senso positivo delle x :

$$R_x = \frac{P_f - P_i}{\Delta t}$$

(Δt è la durata dell'urto) ossia che spinge la sbarra invece di trattenerla sull'asse. Ma non c'è nulla di strano: se la sbarra fosse libera tenderebbe a ruotare in senso antiorario attorno al suo baricentro e la reazione vincolare dell'asse dev'essere nel senso delle x positive per bloccare tale rotazione.

265 Ampiezza di oscillazione Una volta messo in movimento il nostro pendolo balistico (consistente del pendolo originale e della massa che gli si è conficcata dentro) entrerà in oscillazione. Nel moto dopo l'urto ovviamente l'energia si conserva, per cui l'energia cinetica iniziale di rotazione si trasformerà in energia potenziale man mano che il pendolo sale. Trovare l'ampiezza massima equivale a trovare l'altezza a cui sale il baricentro del pendolo. Oppure si può procedere in maniera più elementare. Considerando sempre l'esempio della sbarretta sottile, se l'estremo libero della sbarretta sale di h il baricentro sale di $h/2$. Pertanto l'energia potenziale sarà cresciuta di mgh per il proiettile e di $Mgh/2$ per la sbarretta:

$$(108) \quad U = mgh + Mg \frac{h}{2}$$

Scriviamo la conservazione dell'energia cinetica uguagliando l'energia cinetica di rotazione iniziale all'energia potenziale finale:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) \ell^2 \omega^2 = \left(\frac{M}{2} + m \right) gh$$

da cui otteniamo

$$(109) \quad h = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{3m^2}{(M+3m)(M+2m)}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{\ell}$$

Si vede quindi che dalla misura di h o di α è possibile misurare la velocità del proiettile, v_0 . Ovviamente occorre conoscere anche le due masse e la geometria del pendolo.

266 Energia dissipata Trovare per esercizio quanta energia viene dissipata nell'urto, verificando che è realmente inelastico (fidarsi è bene ma)

267 Sarà bene sapersela cavare se il proiettile non colpisce la sbarretta all'estremità. In tal caso il momento angolare sarà diverso e anche l'aumento di energia potenziale non sarà descritto esattamente dalla formula (108) ma da una abbastanza simile.

Capitolo XI

Rotolamento

268 Moto della ruota su un piano orizzontale Il rotolamento della ruota su una superficie piana è un caso molto importante del moto di un corpo rigido. Tale moto è possibile in virtù della reazione di attrito *statico* fra la ruota e il piano.

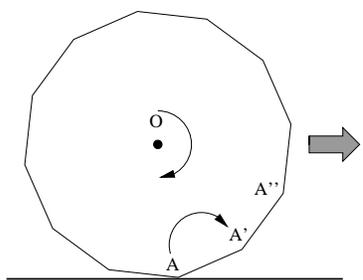


Fig. 33

Non è intuitivo che l'attrito in gioco sia quello statico e non quello dinamico visto che la ruota si muove rispetto al piano. Per rendersene conto approssimiamo la ruota con un poligono regolare come in figura 33: come si vede, il contatto fra ruota e piano si realizza nel punto A che è fermo a causa della reazione di attrito statico. La ruota esegue un puro movimento di rotazione attorno ad A (freccie) fino a che il punto A' entra in contatto col suolo mentre A si solleva ecc. Se il coefficiente di attrito ruota-piano fosse insufficiente si avrebbe invece uno *slittamento* della ruota.

269 Momento angolare Utilizziamo l'equazione (94) per scomporre il momento angolare della ruota che rotola su un piano in una parte $\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$ e in una parte intrinseca di rotazione attorno a un asse passante per il CM. La scomposizione della II Equazione Cardinale ci permette di trattare separatamente le due parti. La prima delle due equazioni (95) in questo caso non dice niente di più della I Equazione Cardinale, per cui non ne faremo uso. In effetti $|\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}| = R P_{CM}$ dove R è costante essendo il raggio della ruota, per cui il momento angolare orbitale è semplicemente proporzionale alla quantità di moto della ruota. Per la II Equazione abbiamo bisogno di calcolare il momento delle forze rispetto all'asse di rotazione, cosa che faremo in un caso particolare.

270 Ruota trainata da una forza Schematizziamo la ruota come un cilindro omogeneo di massa M e raggio R posto su un piano orizzontale (vedi fig. 34) e con l'asse lungo z . Essendo il cilindro omogeneo, possiamo considerare solo la sua proiezione sul piano x, y contenente il CM, dato che le risultanti delle forze sono contenute in detto piano. Oltre alla forza $\vec{F}_{est} = F \vec{e}_x$, applicata nel CM (O), sulla ruota agisce la reazione vincolare di attrito *statico*, \vec{F}_a , che è applicata nel punto C di contatto col piano e che impedisce alla ruota di strisciare.

L'accelerazione del CM della ruota si ottiene dalla I Equazione Cardinale:

$$(110) \quad \vec{A}_{CM} = \frac{\vec{F}_{est} + \vec{F}_a}{M} \quad A_{CM} = \frac{F - F_a}{M}$$

La velocità angolare della ruota sarà diretta come $-z$ (la ruota avanza verso destra). In

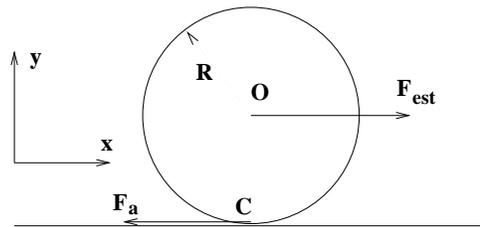


Fig. 34

virtù del fatto che non vi è strisciamento si ha $\omega = V_{\text{CM}}/R$. Infatti in un tempo dt la ruota gira di un angolo $d\alpha = \omega dt$ e avanza di uno spazio $R d\alpha = V_{\text{CM}} dt$. Utilizzando questa relazione e l'eq. (110) possiamo scrivere:

$$(111) \quad \dot{\omega} = \frac{1}{R} \dot{V}_{\text{CM}} = \frac{A_{\text{CM}}}{R} = \frac{F - F_a}{MR}$$

Poiché il cilindro ruota attorno al suo asse che è un *asse principale d'inerzia* il suo momento angolare è parallelo alla velocità angolare: $\vec{L} = I \vec{\omega}$:

$$(112) \quad \begin{aligned} L &= -I_O \omega \\ \dot{L} &= -I_O \dot{\omega} = -I_O \frac{A_{\text{CM}}}{R} = -\frac{R}{2}(F - F_a) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che il momento d'inerzia I_O per un cilindro omogeneo di massa M e raggio R vale $\frac{1}{2}MR^2$.

A questo punto non abbiamo ancora utilizzato la II Equazione Cardinale. Questa equazione impone che dL/dt sia uguale al momento delle forze rispetto all'asse, e quindi costituisce una seconda condizione che dev'essere rispettata insieme all' eq. (112). Al momento delle forze rispetto all'asse contribuisce solo la reazione di attrito (infatti la forza esterna, essendo applicata nel CM, ha momento nullo). Il momento della forza d'attrito è $-RF_a$ e otteniamo quindi:

$$\dot{L} = -RF_a \quad \text{e pertanto, usando la (112)} \quad \frac{(F - F_a)}{2} = F_a$$

da cui ricaviamo per la reazione di attrito $F_a = F/3$ e in definitiva:

$$(113) \quad A_{\text{CM}} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$$

Dalle equazioni otteniamo anche che $A_{\text{CM}} = 2F_a/M$ e, tenendo conto che $F_a \leq \mu_s Mg$, vediamo che l'accelerazione (o la decelerazione, in caso di frenata) di una ruota piena trainata da una forza non può mai superare $2\mu_s g$.

271 Asse istantaneo di rotazione L'asse che corrisponde alla zona di contatto fra il cilindro e il piano si chiama *asse istantaneo di rotazione*. Il nome discende dal fatto che rispetto a tale asse il moto del cilindro si riduce a una pura rotazione. È quindi come se tale asse fosse *istantaneamente* fermo. Il moto può essere risolto anche usando come polo un punto su tale asse (C, vedi fig. 34). Il momento

della forza di attrito in questo caso è nullo, e così pure quello della forza peso, mentre il momento della forza esterna vale $-RF$. Pertanto la II Equazione Cardinale dà:

$$\dot{L} = -I_C \frac{A_{CM}}{R} = -RF$$

Utilizzando il Teorema di Huygens-Steiner (254) $I_C = I_O + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ e quindi ritroviamo il risultato (113).

272 Energia della ruota Un'ulteriore possibilità è quella di studiare il moto della ruota usando il teorema delle forze vive (153). La reazione di attrito statico non fa lavoro, pertanto la sola forza che fa lavoro è quella esterna. Il lavoro fatto per uno spostamento ds del CM vale quindi Fds ed esso è uguale alla variazione di energia cinetica. Per quanto riguarda quest'ultima, utilizzando il teorema di Koenig e tenendo conto che $V_{CM} = \omega R$ possiamo scrivere:

$$T = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_O\left(\frac{V_{CM}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}MV_{CM}^2$$

Si vede chiaramente come l'energia cinetica della ruota sia superiore a quella di un punto materiale di uguale massa e velocità. Nel nostro caso l'incremento di energia cinetica causato dalla rotazione è pari al 50 %. Utilizzando il Teorema delle forze vive:

$$d\left(\frac{3}{4}MV_{CM}^2\right) = Fds$$

Dividendo entrambi i membri per dt ($ds/dt = v$ e $d(v^2) = 2v dv$) troviamo:

$$A_{CM} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$$

ossia il risultato (113).

273 Carrucole di massa $\neq 0$ Finora abbiamo sempre parlato di carrucole di massa nulla. In tal caso abbiamo visto che la carrucola, anche se in moto, si limita a variare la direzione della forza diretta lungo il filo, senza che la tensione del filo cambi.

Se la massa della carrucola non può essere trascurata questo non è più vero. Infatti la carrucola che ruota deve avere un momento angolare $I\omega \neq 0$. Se questo cambia nel tempo allora necessariamente deve esistere una coppia di momento non nullo rispetto all'asse della carrucola. Ma questa coppia è data dalla differenza delle tensioni della corda sui due lati della carrucola, moltiplicata per il suo raggio. Ne segue quindi che le tensioni della corda, in "entrata" e in "uscita" dalla carrucola, non saranno le stesse se la carrucola sta cambiando velocità angolare, ma avremo:

$$I \dot{\omega} = R(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)$$

Detto in maniera non molto precisa ma che rende bene l'idea, un poco della tensione della corda è spesa per fare accelerare la carrucola.

Possiamo applicare questa equazione al paranco (125) schematizzando la carrucola come un cilindro di raggio R e massa m , al quale è applicato il peso M :

$$I \dot{\omega} = (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1)R \quad \rightarrow \quad \frac{mR}{2} \dot{\omega} = \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1$$

Ora, $R\omega$ è pari alla velocità del centro della carrucola, dY/dt , per la condizione di non strisciamento, per cui si può scrivere:

$$(114) \quad \frac{m}{2}\ddot{Y} = \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1$$

La risultante delle forze applicate alla carrucola (l'asse y è preso lungo la verticale verso l'alto) sarà $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - (M + m)g$.

$$(115) \quad (M + m)\ddot{Y} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - (M + m)g$$

Sommando membro a membro la (114) e la (115) e tenendo conto che $\mathcal{T}_2 = F$ otteniamo che l'accelerazione della carrucola vale:

$$(116) \quad \ddot{Y} = \frac{2F - (M + m)g}{M + \frac{3}{2}m}$$

Notiamo che $m \neq 0$ non cambia la condizione di equilibrio, ossia in tal caso la forza è sempre uguale al peso totale.

274 Paranco e teorema delle forze vive Semplici considerazioni energetiche (se non ci sono attriti) possono aiutarci nella comprensione del paranco. Ad esempio possiamo dimostrare facilmente la relazione $\Delta Y = \Delta y/2$ (125).

Partiamo dalla relazione di equilibrio $F = 2Mg$ e (variando di pochissimo F) spostiamo di Δy l'estremo a' della corda cui è applicata la forza (vedi fig.17). Il lavoro fatto dalla forza sarà $F\Delta y = 2Mg\Delta y$. Ma se lo spostamento è eseguito a velocità costante o molto lentamente non ci sarà variazione apprezzabile dell'energia cinetica e quindi questo lavoro dovrà essere uguale e opposto a quello della forza peso, $-Mg\Delta Y$. Ne segue quindi che $\Delta Y = \Delta y/2$.

Il teorema delle forze vive ci permette anche di ottenere facilmente l'accelerazione del paranco. Infatti il lavoro infinitesimo totale è dato da $[2F - (M + m)g]dY$ mentre l'energia cinetica si scrive:

$$(117) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M + m)V_Y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m)V_Y^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(M + \frac{3}{2}m\right)V_Y^2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$dT = \left(M + \frac{3}{2}m\right)V_Y dV_Y = [2F - (M + m)g]dY$$

e dividendo per dt e semplificando otteniamo nuovamente l'eq. (116).

Capitolo XII

Statica

275 La statica studia le condizioni necessarie per l'equilibrio dei corpi rigidi. Condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido sono:

1. che la forza risultante che agisce sul corpo sia nulla;
2. che il momento delle forze sia nullo rispetto a un qualsiasi polo.

Il motivo per cui nella 2. la scelta del polo può essere del tutto arbitraria discende dal fatto che, per la 1. le forze devono avere risultante nulla. Ma allora, in virtù della (242), il momento delle forze non dipende dalla scelta del polo. Naturalmente occorre includere nel calcolo delle risultanti anche tutte le reazioni vincolari.

276 La bilancia Uno dei sistemi più semplici di cui studiare l'equilibrio è la bilancia schematizzata con un'asta imperniata su un asse O . Supporremo che l'asta sia priva di massa.

La bilancia è soggetta a tre forze

1. il peso delle masse m_1, m_2
2. la reazione vincolare R nel fulcro

La condizione di nullità della risultante delle forze implica $(m_1 + m_2)g = R$ che semplicemente fissa il modulo della reazione vincolare. Il momento risultante delle forze lo si calcola rispetto a O . Nella figura l'asse è perpendicolare al foglio. La nullità del momento delle forze ci fornisce quindi (R ha momento nullo rispetto all'asse)

$$(118) \quad (m_1x_1 - m_2x_2)g = 0 \quad \text{per cui la condizione di equilibrio è}$$
$$m_1x_1 = m_2x_2$$

277 Scala appoggiata al muro Una scala appoggiata al muro è un caso leggermente più complesso. Anche in questo caso oltre al peso della scala dovremo tener conto delle reazioni vincolari per ottenere la risultante e il momento delle forze. Supporremo il muro liscio mentre il pavimento, scabro, presenta una reazione di attrito statico.

Dato che il pavimento è scabro la reazione vincolare del pavimento avrà una componente verticale R_{Ay} e una orizzontale R_{Ax} . Il muro è invece liscio la reazione vincolare è normale al muro stesso e quindi orizzontale, R_{Bx} . In Fig. 35 sono disegnate schematicamente la scala e le due reazioni vincolari. La forza peso Mg si immagina applicata nel Centro di Massa della scala (ossia nel centro). Non è stata disegnata per non affollare troppo la figura.

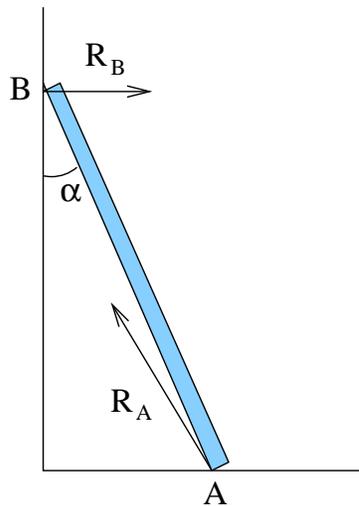


Fig. 35

La condizione di azzeramento della risultante delle forze ci da quindi:

$$(119) \quad \begin{aligned} -Mg + R_{Ay} &= 0 \\ R_{Ax} + R_{Bx} &= 0 \end{aligned}$$

Per calcolare il momento delle forze siamo liberi di scegliere l'asse che ci fa più comodo. Scegliamo l'asse passante per A in modo da azzerare il momento delle due reazioni vincolari R_{Ax} e R_{Ay} . Nel calcolo del momento della forza peso applicheremo la forza nel baricentro della scala (105) ossia a metà della medesima. Otteniamo quindi:

$$Mg \frac{L}{2} \sin \alpha - R_{Bx} L \cos \alpha = 0$$

Ottenendo da questa R_{Bx} e sostituendolo nella seconda delle (119) troviamo che

$$R_{Ax} = -\frac{Mg}{2} \tan \alpha$$

e dato che per la reazione di attrito vale la condizione $|R_{Ax}/R_{Ay}| \leq \mu_s$ troviamo che la scala si trova in equilibrio (non scivola) se

$$(120) \quad \tan \alpha \leq 2\mu_s$$

Pertanto se il pavimento è liscio ($\mu_s = 0$) la scala non scivola solo se è perfettamente verticale ($\alpha = 0$).

278 Trave In figura si vede una trave fissata da un lato a un muro tramite una cerniera e dall'altro sostenuta da un tirante anch'esso fissato al muro. La trave ha un peso $M\vec{g}$ e ad essa sono applicate negli estremi la reazione vincolare esercitata dal muro \vec{R}_1 e dall'altro la tensione della fune \vec{T} . La condizione di equilibrio delle forze ci dice

$$(121) \quad \begin{aligned} \text{lungo } x: \quad R_1 \cos \alpha &= T \cos \beta \\ \text{lungo } y: \quad R_1 \sin \alpha + T \sin \beta &= Mg \end{aligned}$$

Notiamo prima di tutto che, mentre β è noto (l'angolo che la trave forma col tirante) α è incognito e dev'essere ottenuto nella soluzione.

Per l'equilibrio dei momenti prendiamo per esempio il polo nella cerniera. Ricordiamo (105) che ai fini del calcolo del momento la forza peso dev'essere pensata come applicata nel baricentro della trave (in questo caso a $x = L/2$). Otteniamo quindi:

$$(122) \quad -Mg \frac{L}{2} + TL \sin \beta = 0$$

Abbiamo quindi 3 equazioni in 3 incognite (T , R_1 e α). La soluzione è

$$(123) \quad \begin{aligned} T &= \frac{Mg}{2 \sin \beta} \\ R_1 &= T \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Capitolo XIII

Dinamica dei fluidi

279 Si chiamano *fluidi* le sostanze che non hanno forma propria. La forma di un fluido è in genere quella del recipiente che lo contiene ¹. Quei fluidi che hanno volume proprio si chiamano *liquidi*, gli altri sono i *gas*.

Lo studio della dinamica dei fluidi non può esser fatto con i normali metodi della meccanica, dato l'elevatissimo numero di particelle in gioco. Infatti, anche se potessimo risolvere le equazioni del moto, saremmo di fronte all'impossibilità di specificare le velocità e le posizioni iniziali di $\approx 10^{23}$ molecole o atomi. D'altronde l'esperienza ci mostra che nello studio dei fluidi non ci servirebbe a niente conoscere l'evoluzione delle singole molecole, serve piuttosto quella di porzioni di fluido estese su dimensioni macroscopiche. Si cerca quindi di determinare il moto di queste porzioni di fluido applicando ad esse le equazioni della meccanica. Il problema principale è tener conto di tutte le forze che le varie parti di fluido esercitano fra di loro. Un altro problema sta nel fatto che il volume di fluido in genere non conserva la sua forma durante il moto e a volte nemmeno la sua massa.

280 Densità Dato un volumetto di fluido dV la sua massa si esprime come $dm = \rho dV$, e la grandezza $\rho = dm/dV$ viene chiamata densità del fluido. Essa in generale cambia da un punto all'altro all'interno del fluido. Se è costante il fluido si dice *incompressibile*, una proprietà che è approssimativamente vera per i liquidi.

281 Velocità Se il volumetto dV di fluido è abbastanza piccolo (pur avendo dimensioni macroscopiche) potremo agevolmente parlare della sua velocità. La misura della velocità di un liquido si fa sperimentalmente mescolando ad esso delle polveri colorate e scattando delle fotografie a intervalli regolari. In realtà la velocità delle molecole contenute nel volumetto è molto diversa fra una molecola e l'altra, ma quello che determina la velocità del volumetto è la media di tutte le velocità molecolari, ed essa non cambia in maniera caotica. Inoltre non cambia in modo drastico passando da un volumetto ad un altro vicino.

Avendo assegnato una massa e una velocità al volumetto, esso sarà dotato di una quantità di moto pari a $\rho dV \vec{v}$. La risultante delle forze che agiscono sul volumetto di fluido determina, in base alla legge di Newton, la variazione della quantità di moto.

282 Si danno a questo punto due metodi differenti per lo studio della dinamica dei fluidi:

1. punto di vista *sostanziale* o *Lagrangiano*, in cui si segue il moto di ciascun elemento di fluido;

¹Diciamo "in genere" perché se lanciamo in aria l'acqua contenuta in un bicchiere il recipiente viene momentaneamente a mancare, ma chiaramente l'acqua non cessa per questo di essere un fluido.

2. punto di vista *locale* o *Euleriano*, in cui si studia come variano nel tempo le proprietà del fluido (densità, velocità, ecc.) in ciascun punto dello spazio.

Le equazioni che si ottengono sono naturalmente diverse. Per il nostro studio elementare ci baseremo sul secondo metodo, quello locale.

283 Forze - Pressione Come esercita le sue forze un fluido sugli oggetti immersi in esso o sulle pareti che lo circondano? L'esperienza mostra che queste forze sono trasmesse attraverso le superfici di separazione fra gli oggetti e il fluido. Notiamo per inciso che "oggetto" è un termine del tutto generico: anche una porzione del fluido stesso può considerarsi un oggetto. Suddividendo la superficie di separazione in piccoli elementi di area dS , si trova che la forza esercitata dal fluido è sempre *normale* all'elemento e proporzionale alla sua area: si può quindi scrivere $d\vec{F} = \vec{e}_n P dS$ (\vec{e}_n è il versore normale alla superficie, diretto dalla parte opposta al fluido). Il coefficiente di proporzionalità P si chiama *pressione* del fluido in quel punto. Si dimostra che esso non dipende dall'orientamento della superficie e quindi **la pressione è uno scalare**.

284 Unità di misura della pressione La pressione, essendo una forza divisa un'area, si misura nel sistema MKS in Newton/ m^2 . Questa unità prende il nome di Pascal (Pa) e la pressione atmosferica vale circa 101000 Pa. Sono in uso anche i multipli del Pascal (kPa e MPa)². Unità tradizionali e ancora in uso sono:

- l'atmosfera "standard" che corrisponde a 760 mm di mercurio misurati col barometro di Torricelli, e che prende anche il nome di bar (sottomultiplo il mbar) e vale 101325 Pa;
- il kg/cm^2 (sempre molto usato per la pressione delle gomme) in cui il kg è in realtà il kg-forza (pari a circa 9.8 N) per cui quest'unità vale circa 98000 Pa;
- il torr (o millimetro di mercurio) di cui 760 fanno 1 bar o 1 atm.

Si tende spesso a confondere l'atm. col kg/cm^2 , in realtà la somiglianza è approssimata e del tutto fortuita.

285 Fluido pesante: variazione di P con la quota Si trova facilmente che la pressione in un fluido pesante varia con la quota z secondo la seguente legge:

$$(124) \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

dove bisogna ricordarsi che a priori ρ è funzione di (x, y, z) . Se $\rho = cost$ (fluido incompressibile) la (124) può essere integrata trovando che $P(z_2) - P(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1)$.

Ad esempio la pressione a una profondità h sotto il livello del mare vale

$$P = P_0 + \rho gh$$

dove P_0 è la pressione alla superficie, ossia la pressione atmosferica, pari come abbiamo visto a circa 100 kPa. A 10 m sott'acqua quindi la pressione raddoppia. Questo può provocare danni

²Sfortunatamente il Pa non è vicino a un multiplo "ragionevole" delle unità usate in passato (come il kg/cm^2) per cui stenta ad attecchire nell'uso corrente. Eccezione degna di lode sono i pullman di pellegrini polacchi, sui quali le pressioni di gonfiaggio delle ruote sono indicate appunto in MPa!

ai timpani, dato che si manifesta un sensibile dislivello in pressione fra l'esterno e l'interno dell'orecchio.

In questo caso la pressione corrisponde quindi semplicemente al peso di una colonna d'acqua di sezione S e altezza h (ρShg), divisa per la sezione della colonna.

La pressione atmosferica corrisponde al peso di una colonna d'aria alta come l'atmosfera (circa 20 km). In questo caso occorre tener conto del fatto che la pressione varia con l'altezza (rarefazione dell'aria).

286 Principio dei vasi comunicanti Se colleghiamo con un tubo il fondo di più recipienti pieni con lo stesso liquido vediamo che il liquido si porta dovunque allo stesso livello. Se infatti il livello fosse diverso in due vasi (h_1 e h_2) la pressione nel tubo di collegamento sarebbe diversa a seconda se la calcoliamo usando h_1 oppure h_2 .

287 Se i recipienti sono riempiti con liquidi immiscibili con densità diverse allora i livelli saranno diversi per equalizzare la pressione nel tubo di collegamento.

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

288 Manometro e barometro Il manometro è uno strumento che serve a misurare la pressione. Il disegno dei manometri dipende dalle pressioni che si vogliono misurare, dalla precisione richiesta, dal tipo di fluido, ecc. Le forze di pressione possono ad esempio produrre deformazioni meccaniche che agiscono su uno strumento indicatore. Se la pressione da misurare è quella atmosferica, si parla di barometro. Esistono barometri puramente meccanici (per intenderci quelli che usiamo in casa) e anche elettrici (sfruttano le proprietà di certi cristalli), tuttavia la versione originale del barometro (inventato da Evangelista Torricelli) è ancora in uso e la descriviamo brevemente.

289 Legge di Archimede Consideriamo una porzione di volume V di fluido di forma qualunque. La forma che definisce la porzione è delimitata da una superficie che separa la porzione (al suo interno) dal resto del liquido (all'esterno). La porzione di fluido è in equilibrio, pertanto il suo peso $Mg = \rho_{\text{liq}} Vg$ è equilibrato dalle forze di pressione

$$(125) \quad \sum F_i = \rho_{\text{liq}} Vg$$

Le forze di pressione sono esercitate per definizione dal fluido circostante, per cui possiamo dire che il fluido esercita una *spinta* verso l'alto uguale al peso della porzione. La spinta dipende solo dal fluido esterno al volume per cui non cambia se la porzione di fluido viene rimpiazzata da un oggetto che abbia la stessa forma, ad esempio un pezzo di ferro. Questa semplice (oggi) osservazione costituisce il *Principio o Legge di Archimede* ossia:

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato

$$(126) \quad F_a = \rho_{\text{liq}} Vg$$

E' importante notare che la densità che compare qui è quella del liquido e non quella del solido.

290

291 Moto laminare e vorticoso

292 Linee di corrente

293 Equazione di continuità

294 Equazione di Bernoulli L'equazione di Bernoulli mette in relazione fra loro la pressione, la velocità e la quota di un fluido pesante. Fu ottenuta dal fisico svizzero Daniel Bernoulli nel 1783. La dimostriamo nel caso di un fluido ideale incompressibile. Consideriamo in Fig. 36 un tubo di flusso di sezione variabile. L'altezza è indicata con la lettera z . In un tempo dt dentro il tubo penetra la quantità di fluido contenuta nel volumetto $dV = S_1 ds_1 = S_1 v_1 dt$, la cui massa vale quindi $dm = \rho S_1 v_1 dt$. La forza che agisce su tale massa di fluido è $F_1 = P_1 S_1$ ed essa fa quindi un lavoro (positivo)

$$d\mathcal{L}_1 = F_1 ds_1 = P_1 S_1 v_1 dt = \frac{1}{\rho} P_1 dm$$

Nello stesso tempo alla base del tubo esce la stessa massa di fluido dm . Deve uscire la stessa massa per via dell'equazione di continuità e per via del fatto che, essendo il fluido incompressibile, la densità dentro il tubo di flusso non può variare. Il lavoro in questo caso sarà negativo dato che la pressione è sempre rivolta verso l'interno del tubo di flusso, e quindi contro la velocità del fluido:

$$d\mathcal{L}_2 = F_2 ds_2 = -P_2 S_2 v_2 dt = -\frac{1}{\rho} P_2 dm$$

per cui il lavoro totale **delle forze di pressione** sarà

$$(127) \quad d\mathcal{L} = \frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) dm$$

A questo occorre sommare il lavoro fatto dalla **forza peso**, che è semplicemente dato da $dm g (z_1 - z_2)$. Per il Teorema delle forze vive (153) potremo quindi scrivere l'**equazione di Bernoulli**:

$$(128) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2) &= \frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) dm + dm g (z_1 - z_2) \\ \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2 + \rho g z_2 &= \frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 + \rho g z_1 = \text{costante} \end{aligned}$$

In pratica l'equazione di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia meccanica nel fluido. E' quindi evidente che la sua validità è ristretta al caso di fluidi non viscosi, per i quali le forze di attrito interno sono assenti.

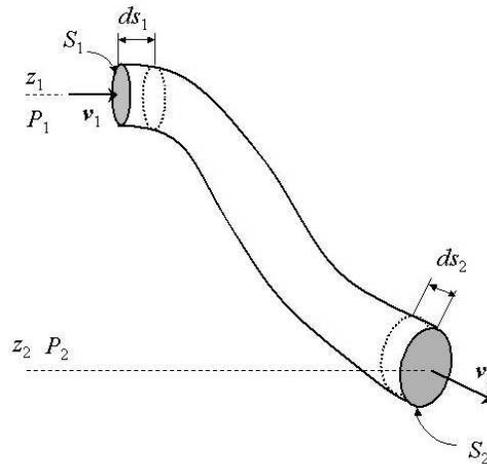


Fig. 36

295 Teorema di Torricelli Prendiamo un recipiente di sezione S riempito di liquido e pratichiamo un forellino di sezione $S' \ll S$ a una profondità h sotto il pelo del liquido. La condizione sulle sezioni è importante dato che ci permette di trascurare la velocità con cui il pelo del liquido scende: infatti per l'equazione di continuità $vS = v'S'$ e quindi $v \ll v'$ e a maggior ragione $v^2 \ll v'^2$. Le pressioni P_1 e P_2 si possono considerare uguali entrambe alla pressione all'esterno del serbatoio (quella atmosferica) per cui, se applichiamo l'equazione di Bernoulli (128) a un tubo di flusso che va dal pelo del liquido al forellino d'uscita otteniamo il **Teorema di Torricelli**

$$(129) \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

Si vede quindi che le particelle di liquido si comportano come dei punti materiali in caduta libera da un'altezza h . Questo risultato non deve sorprendervi, dato che l'equazione di Bernoulli è stata ottenuta applicando le leggi della meccanica alle particelle di fluido.

296 Il getto d'acqua da un rubinetto Vi siete mai chiesti come mai il getto d'acqua che esce da un rubinetto si restringe come si vede in Fig. 37? La ragione sta nell'equazione di continuità combinata con quella di Bernoulli. Se applichiamo quest'ultima al tubo di flusso uscente dal rubinetto, possiamo calcolare come la velocità del fluido cresce all'allontanarsi dalla bocca:

$$(130) \quad v_2^2 = v_1^2 + \frac{2}{\rho}(P_1 - P_2) + 2gh$$

Per l'equazione di continuità dobbiamo quindi avere

$$(131) \quad \begin{aligned} S_2 &= S_1 \frac{v_1}{v_2} < S_1 && \text{e per il diametro del getto} \\ D_2 &= D_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} < D_1 \end{aligned}$$

Dato che v_2 è una funzione crescente di h , che va approssimativamente per grandi h come $\sim h^{1/2}$, il diametro del getto del rubinetto decresce all'incirca come $\sim h^{-1/4}$.



Fig. 37