

Istituzioni di Fisica Teorica - Meccanica Quantistica
III Compito di Esonero del 13-12-2002

Esercizio III.1

Due particelle (distinguibili) di spin $1/2$ sono descritte dall'Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{\vec{S} \cdot \vec{S}}{2I} + \omega S_z \quad (1)$$

dove $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ rappresenta lo spin totale del sistema.

Determinare lo spettro degli autovalori e degli autostati di H_0 .

All'istante $t = 0$ viene accesa la perturbazione

$$V(t) = \lambda(e^{i\omega t} S_x S_z + e^{-i\omega t} S_z S_x) \quad (2)$$

Supponendo che per $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi(0)\rangle$ in cui misure simultanee di $\vec{S} \cdot \vec{S}$ e S_z forniscono $2\hbar^2$ e $+\hbar$, calcolare in funzione di t la probabilità di permanenza nello stato $|\psi(0)\rangle$ al primo ordine in λ .

*Calcolare la stessa probabilità esattamente (senza approssimazioni).

Esercizio III.2

Un atomo d'idrogeno è perturbato da un campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ diretto lungo l'asse z con $\mathcal{E}_z = \epsilon z$.

Assumendo che $V(z=0) = 0$, calcolare il potenziale perturbante $V(z)$ e determinare le regole di selezione per gli elementi di matrice di $V(z)$.

Studiare l'effetto della perturbazione sui primi due livelli all'ordine più basso in ϵ .

Esercizio III.3

Un fascio di particelle di massa m ed impulso \vec{p} viene diffuso dal potenziale

$$V(r) = \frac{V_0 a^2}{(r^2 + a^2)} \quad (3)$$

Calcolare le sezioni d'urto differenziale e totale e verificare che quest'ultima soddisfi il teorema ottico.

Esercizio di recupero

All'istante iniziale ($t = 0$) un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato $|\psi(0)\rangle = N(3|0\rangle + 4i|1\rangle)$.

Determinare la costante di normalizzazione N e calcolare in funzione del tempo i valori medi di H , x e p .

Calcolare la densità di probabilità $\rho(x, t)$ e la densità di corrente $J(x, t)$ nello stato $|\psi(t)\rangle$ e verificare l'equazione di continuità.

Tema

Discutere l'approssimazione WKB: in che cosa consiste, quali sono i limiti, quali sono i risultati per le autofunzioni ed i livelli energetici e per la trasmissione attraverso una barriera.

Esercizio di Meccanica Statistica

Un recipiente è separato in due parti da un setto adiabatico scorrevole. In una parte è contenuto un corpo nero alla temperatura T , nell'altra un gas di \mathcal{N} neutrini (fermioni ultrarelativistici di spin $1/2$) completamente degenere ($T = 0$). Determinare all'equilibrio meccanico la frazione di volume occupata dai fotoni. Si ricorda che

$$\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (4)$$