**Istituzioni di Fisica Teorica - Meccanica Quantistica**
**Problemi 4 da consegnare il 18-11-2002**

**Problema 4.1**

Un rotatore quantistico asimmetrico è immerso in un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse $z$. L'Hamiltoniano del sistema assume la forma

$$H = \frac{\vec{L} \cdot \vec{L}}{2I} + a(L_x^2 - L_y^2) + bL_z \tag{1}$$

con $I, a, b$ costanti positive.

Supponendo che nello stato iniziale misure simulatanee di $\vec{L} \cdot \vec{L}$ e di $L_z$ diano come risultati $2\hbar^2$ e $+\hbar$, stabilire i risultati possibili di una misura di $L_x$ e le relative probabilità in funzione del tempo.

**Problema 4.2**

Una particella di massa $m$ é confinata all'interno della sfera $r < R$.

Scrivere l'equazione di Schrödinger per la parte radiale della funzione d'onda, stabilire le condizioni al contorno che essa deve soddisfare e discutere qualitativamente lo spettro degli autovalori dell'energia.

Portare l'equazione per lo stato fondamentale ($l = 0$) in forma canonica e risolverla (inclusa la costante di normalizzazione). Calcolare la probabilità che una particella nello stato fondamentale si trovi ad una distanza maggiore di $R/2$ dall'origine.

**Problema 4.3**

Mostrare che se $[H, A] = 0$ e $[H, B] = 0$ ma $[A, B] \neq 0$ allora qualche autovalore di $H$ deve essere degenere.

Discutere la degenerazione dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno alla luce di questo risultato. Verificare che oltre al momento angolare $\vec{L}$ esiste un altro operatore vettoriale conservato della forma

$$\vec{K} =: \vec{p} \times \vec{L} : + mV(r)\vec{x} \tag{2}$$

(vettore di Runge-Lenz). Determinare l'ordinamento degli operatori (indicato con : ... :) per il quale $[H, \vec{K}] = 0$ e $\vec{K}^\dagger = \vec{K}$ e calcolare i commutatori $[K_i, K_j]$ e $[L_i, K_j]$.