

Istituzioni di Fisica Teorica
Meccanica quantistica I
Prova scritta del 21-2-2003

Esercizio 1: Meccanica Quantistica

Una particella di spin 1/2 in una dimensione é governata dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0 M(x)$$

dove V_0 è una costante positive e

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{2x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) & \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) \\ \sinh\left(\frac{x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) & \cosh\left(\frac{2x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \end{pmatrix} \quad (1)$$

con a una costante positiva.

Diagonalizzare $M(x)$ e discutere qualitativamente lo spettro di H .

Determinare i livelli di energia utilizzando l'approssimazione WKB.

Si ricorda che

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\xi}{\xi} \sqrt{-\xi^2 + 2b\xi - c^2} = \pi(b - c) \quad (2)$$

dove b, c sono costanti positive con $b > c$ e $\xi_{\pm} = b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ sono le due radici del trinomio nel radicale integrando.

Esercizio 2: Meccanica Quantistica

Due particelle di massa m e spin 1/2 in due dimensioni sono soggette ad un potenziale armonico

$$V(x_1, x_2) = m\omega^2(x_1 - x_2)^2 \left[1 + \frac{(s_{1z} + s_{2z})}{\hbar} + \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\hbar^2} \right]$$

Determinare i livelli energetici specificando le relative degenerazioni.

Calcolare al prim'ordine della teoria delle perturbazioni la correzione ai livelli energetici dovuta alla presenza di un campo magnetico \vec{B}_0 debole e costante che si accoppia al momento magnetico totale $\mu = g_1 \vec{s}_1 + g_2 \vec{s}_2$ delle due particelle:

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$$

Esercizio 3: Meccanica Statistica

Un gas di N particelle distinguibili in un volume V è all'equilibrio termico alla temperatura T . L'Hamiltoniano di singola particella assume la forma

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \alpha |\vec{x}|^3 \quad (3)$$

dove m indica la massa e α una costante positiva.

Calcolare l'energia interna e l'entropia del sistema nel limite di alta temperatura.

Discutere qualitativamente il comportamento del calore specifico a bassa temperatura.