MECCANICA QUANTISTICA 1 - A.A. 2003-04

II Esonero Quadratico Medio

Esercizio II.1

Una particella di spin 1/2 in tre dimensioni é descritta dall'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + m\omega^2 \frac{|\vec{x}|^2}{2} + bxS_x.$$

dove b è una costante positiva.

Determinare lo spettro degli autostati e degli autovalori dell'energia incluse le eventuali degenerazioni.

Calcolare la probabilità di misurare $\vec{L} = 0$ nello stato di minima energia con $S_z = -\hbar/2$.

Esercizio II.2

Una particella di massa m in una dimensione è soggetta al potenziale

$$V(x,0) = \frac{k}{2}(x^2 - a^2) \text{ per } |x| < a \quad V(x,0) = ka(x-a) \text{ per } |x| > a$$

dove k e a sono costanti positive.

Discutere qualitativamente lo spettro degli autovalori dell'energia.

Utilizzando la formula di Bohr-Sommerfeld dedurre (e risolvere quando possibile) un'equazione per i livelli energetici in approssimazione WKB.

Esercizio II.3

All'istante iniziale ($t = 0$), l'elettrone di un atomo idrogenoide con $Z = 3$ si trova nello stato con $S_z = +\hbar/2$ e con funzione d'onda orbitale

$$\psi(r,\theta,\phi) = 6Ne^{-\frac{r}{a_Z}} + 4iN\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}}\frac{r\cos\theta}{a_Z}e^{-\frac{r}{2a_Z}}$$

dove $a_Z = a_{Bohr}/Z$. Stabilire i possibili risultati delle misure di $J_x + J_y = L_x + S_x + L_y + S_y$ e le relative probabilità in funzione del tempo. Calcolare il valor medio dell'operatore $W^{ij} = x^i p^j + p^j x^i$ alla luce del teorema di Wigner-Eckart.