MECCANICA QUANTISTICA 1 - A.A. 2003-04

II Prova di Esonero del 10-12-03

Esercizio II.1

Una particella di massa m in una dimensione è soggetta al potenziale

$$V(x,0) = 0 \text{ per } |x| < a$$

$$V(x,0) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x-a)^2 \text{ per } x > a$$

$$V(x,0) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x+a)^2 \text{ per } x < -a$$

dove a è una costante positiva.

Discutere qualitativamente lo spettro degli autovalori dell'energia. Determinare i livelli e le corrispondenti autofunzioni in approssimazione WKB.

Esercizio II.2

Due rotatori quantistici accoppiati sono governati dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{|\vec{L}_1|^2}{2I_1} + \frac{|\vec{L}_2|^2}{2I_2} + A\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 + B(L_{1z} + L_{2z})$$

dove I_1, I_2, A e B sono parametri positivi.

Determinare autovalri ed autostati di H incluse le eventuali degenerazioni in funzione dei parametri.

Calcolare in funzione di t la probabilità di misurare $L_{1x} = L_{2x} = 0$ nello stato in cui inizialmente (per $t = 0$) $L_{1z} = L_{2z} = 0$ e $|\vec{L}_1|^2 = |\vec{L}_2|^2 = 2\hbar^2$.

Esercizio II.3

All'istante iniziale ($t = 0$), l'elettrone di un atomo d'idrogeno si trova in uno stato $|\psi, t = 0 >$ in cui $S_z = +\hbar/2$, $\vec{L} = 0$, $< H >= -{q_e}^2/6a$ e $< r >= 11a/2$, dove a è il raggio di Bohr e q_e la carica dell'elettrone. Sapendo che misure dell'energia danno con certezza $E < -{q_e}^2/12a$ e che la parte orbitale della funzione d'onda soddisfa $Im(\psi)Re(\psi) > 0$ per $r < 2a$, determinare la distribuzione di probabilità delle misure di $\vec{p}$ all'istante iniziale.

Calcolare in funzione del tempo il valor medio dell'operatore $\vec{p}$ e i possibili risultati delle misure di $\vec{J}$ e le relative probabilità.

Esercizio di Meccanica Statistica Si consideri un gas di N particelle quantistiche distinguibili di spin 1/2 e massa m, alla temperatura T in tre dimensioni. L'Hamiltoniano di singola particella è dato da

$$\hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + m\omega^2 \frac{|\vec{x}|^2}{2} + bxS_x.$$

dove b è una costante positiva.

Calcolare l'energia interna e il calore specifico a volume costante.

Calcolare il valore medio termico di $\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i$.