Anno Accademico 1998-99
Istituzioni di Fisica Teorica
Compito di prova
10/11/98

Primo Esercizio

Un sistema a 3 stati è governato dall'Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[\frac{1}{2}(A^2 + B^2) - C \right]$$

dove

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Mostrare che $[\hat{H}, C] = 0$, per cui $\hat{H}$ è diagonalizzabile sulla stessa base di C;
- Calcolare autovalori e autovettori di $\hat{H}$;
- Determinare al tempo $t = 0$ lo stato $|\psi(0)\rangle$ sul quale una misura di A dà con certezza il valore zero;
- Calcolare i valori medi $\langle A\rangle(t)$, $\langle B\rangle(t)$ e $\langle C\rangle(t)$.

Secondo Esercizio

Si consideri il viriale $f(x, p) = x \cdot p$ per l'oscillatore armonico.

- Mostrare che l'ordinamento simmetrico $\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$ è un operatore hermitiano $\hat{S}^+ = \hat{S}$;
- Esprimere $\hat{S}$ in termini di operatori $\hat{a}$, $\hat{a}^+$;
- Calcolare il valor medio di $\hat{S}$ sullo stato coerente $|\lambda\rangle = e^{\frac{-|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^+} |0\rangle$ per il quale $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$;
- Studiare l'evoluzione temporale di $\langle\lambda|\hat{S}|\lambda\rangle$
  a) nella rappresentazione di Heisenberg (evolvendo $\hat{S}$)
  b) nella rappresentazione di Schroedinger (evolvendo $|\lambda\rangle$).

Terzo Esercizio

Si consideri una particella in una buca infinita.

Determinare il propagatore (nucleo di evoluzione):

- nella formulazione hamiltoniana
- nella formulazione lagrangiana, sommando su tutte le traiettorie che collegano il punto iniziale x_i alle (infinite) immagini del punto finale x_f, $2L - x_f$, $2L + x_f$ *etc* (supponendo gli urti con le pareti perfettamente elastici).