Anno Accademico 1998-99
Istituzioni di Fisica Teorica
I Compito di esonero
16/11/98

Primo Esercizio

Un sistema a due stati è governato dall'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \omega(\hat{S}_x + \hat{S}_y)$$

$$\text{con} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare autovalori ed autovettori di H.
b) Studiare l'evoluzione temporale dello stato $|\psi>$ sul quale una misura di $\hat{S}_y$ al tempo $t = 0$ dà con certezza il risultato $+\hbar/2$.
c) Calcolare la funzione di correlazione

$$< \psi(0)|\hat{S}_x(t)\hat{S}_x(0)|\psi(0) >$$

evolvendo l'operatore $\hat{S}_x$ nella rappresentazione di Heisenberg.

Secondo Esercizio

Lo stato iniziale di un sistema unidimensionale è descritto dal pacchetto d'onde

$$\psi(x, 0) =< x|\psi(0) >= Nx^2 e^{-\alpha x^2}$$

dove α è una costante reale positiva.
a) Determinare la costante di normalizzazione N in funzione di α.
b) Verificare al tempo $t = 0$ la relazione di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{(< \hat{x}^2 > - < \hat{x} >^2)(< \hat{p}^2 > - < \hat{p} >^2)} \geq \frac{\hbar}{2}$$

per il pacchetto in questione.
c) Studiare l'evoluzione temporale del pacchetto per una una particella di massa m soggetta ad un potenziale armonico con $\omega = \frac{2\hbar\alpha}{m}$ e per una particella libera ($\hat{H} = \hat{p}^2/2m$).

Terzo Esercizio

Si consideri una particella di massa m in una dimensione in presenza di un potenziale

$$V(x) = -\frac{V_o}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^n}$$

dove $n = 2$ e le costanti reali positive a e V_o sono legate dalla relazione $V_o = \frac{2\hbar^2}{ma^2}$.

a) Discutere qualitativamente lo spettro di energia e dare una stima per il numero totale dei livelli di energia degli stati legati usando la formula di Bohr-Sommerfeld.

b) Ripetere la discussione precedente nei tre seguenti casi

i) $V_o \to 2V_o$;

ii) $a \to 2a$;

iii) $n = 1$.

c) Calcolare al tempo $t = 0$ i valori medi di $\hat{x}, \hat{p}, \hat{p}^2, \hat{H}$ nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = < x|\psi(0) > = \frac{N}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}$$

dopo aver fissato la costante di normalizzazione N.

d) Spiegare perché uno solo dei precedenti valori medi varia con il tempo.