

Anno Accademico 1998-99
Istituzioni di Fisica Teorica
III Compito di esonero
27/1/99

Primo Esercizio

Si consideri un gas di N particelle non interagenti in una scatola di volume V per le quali l'hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}.$$

- a) Scrivere l'espressione per la funzione di partizione del sistema nell'ensemble canonico classico alla temperatura T .
- b) Stimare l'energia libera del sistema con il metodo variazionale usando come hamiltoniana di prova di singola particella

$$H = \frac{p^2}{2M},$$

dove M è il parametro variazionale.

- c) Stimare l'energia interna e il calore specifico a volume costante usando i risultati ottenuti con il metodo variazionale.

Secondo Esercizio

Si consideri un gas di \mathcal{N} oscillatori bosonici di spin 0 in una regione bidimensionale di area A .

- a) Scrivere le equazioni di definizione dell'ensemble grancanonico quantistico per il sistema ed identificare il valore critico μ_c del potenziale chimico.
- b) Calcolare il potenziale chimico nel limite di alte temperature.
- c) Discutere l'esistenza della temperatura critica T_c alla quale $\mu(T_c) = \mu_c$ e scrivere l'equazione che la determina.

Terzo Esercizio

Si consideri un gas di \mathcal{N} fermioni di spin $1/2$ in un segmento unidimensionale di lunghezza L per i quali la relazione tra energia di singola particella ϵ e impulso p è data da

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= \epsilon_0 \sin^2\left(\frac{|p|a}{\hbar}\right) & |p| \leq \frac{\pi\hbar}{2a} \\ \epsilon(p) &= \epsilon_0 \left[3 - \sin^2\left(\frac{|p|a}{\hbar}\right)\right] & \frac{\pi\hbar}{2a} < |p| \leq \frac{\pi\hbar}{a}\end{aligned}$$

dove $\epsilon_0 = \hbar^2/(2ma^2)$ con a una costante avente dimensioni di una lunghezza.

- a) Scrivere le equazioni di definizione dell'ensemble grancanonico per il sistema.
- b) Calcolare l'energia interna nel limite di degenerazione completa ($T = 0$) nei seguenti tre casi: $L = \mathcal{N}a/2$, $L = \mathcal{N}a$ e $L = 3\mathcal{N}a/2$.
- b) Discutere il comportamento qualitativo del calore specifico a bassa temperatura nei tre casi suddetti.