

Anno Accademico 1999-2000
Istituzioni di Fisica Teorica
III Compito di Esonero
26/1/2000

Primo Esercizio

Si consideri un sistema di N rotatori quantistici non interagenti all'equilibrio termico, per i quali l'hamiltoniano del singolo rotatore è:

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{L}_x^2 + \frac{1}{2I}\hat{L}_y^2 + \frac{1}{2I_z}\hat{L}_z^2 = \frac{1}{2I}(\hat{L}^2 + \lambda\hat{L}_z^2) \quad \text{con } \lambda = \left(\frac{I}{I_z} - 1\right) > 0.$$

- a) Scrivere le espressioni della funzione di partizione del sistema, dell'energia libera e dell'energia interna, e calcolare il calore specifico nel limite di basse temperature.
- b) Stimare l'energia libera del sistema con il metodo variazionale e nel limite di alte temperature usando un ensemble di prova in cui l'hamiltoniano del singolo rotatore $\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mathcal{J}}\hat{L}^2$ è isotropo, ed il momento d'inerzia \mathcal{J} è il parametro variazionale.
- c) Mostrare che la stima variazionale (che rende minima l'energia libera ad alte temperature) è in realtà un risultato valido per tutte le temperature, poiché

$$U_0(\mathcal{J}) + \mathcal{J} \frac{d}{d\mathcal{J}} U_0(\mathcal{J}) \geq 0.$$

dove $U_0(\mathcal{J})$ è l'energia interna nell'ensemble di prova.

Suggerimento: $\sum_{m=-l}^{+l} m^2 = \frac{(2l+1)l(l+1)}{3}$

Secondo Esercizio

Un recipiente è diviso in due parti da un setto adiabatico che può scorrere senza attrito, in maniera tale che i gas contenuti nelle due regioni separate siano all'equilibrio meccanico.

In una delle due parti è contenuto un gas di fotoni ("corpo nero") in equilibrio alla temperatura T ; nell'altra parte è contenuto un gas di N fermioni ultra-relativistici ($m = 0$) di spin $1/2$ a temperatura nulla.

Determinare il volume V occupato dai fermioni all'equilibrio meccanico del setto in funzione della temperatura T e del numero medio di fermioni N .