

# Indice

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Matrici di Pauli</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Funzioni di operatori</b>   | <b>5</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Principio di indeterminazione</b>   | <b>5</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Equazione di Shroedinger</b>  | <b>6</b>  |
| 4.1       | Equazione d'onda . . . . .   | 6         |
| 4.2       | Equazione d'onda stazionaria . . . . .                                       | 6         |
| 4.3       | Particella libera $D$ -dim . . . . .   | 6         |
| 4.4       | Particella su un segmento (Buca infinita) . . . . .                          | 7         |
| 4.5       | Raccordo della funzione d'onda in un punto $x_0$ . . . . .                   | 7         |
| 4.6       | Delta di Dirac . . . . .   | 7         |
| <b>5</b>  | <b>Teorema del viriale</b>   | <b>8</b>  |
| <b>6</b>  | <b>Coefficienti di riflessione e trasmissione</b>                            | <b>9</b>  |
| 6.1       | Matrice di trasmissione e matrice di scattering . . . . .                    | 9         |
| <b>7</b>  | <b>Oscillatore armonico 1-dim</b>  | <b>11</b> |
| 7.1       | Rappresentazione nello spazio delle coordinate . . . . .                     | 11        |
| 7.2       | Operatori di creazione e distruzione (innalzamento e abbassamento) . . . . . | 12        |
| <b>8</b>  | <b>Il momento angolare</b>   | <b>13</b> |
| 8.1       | Algebra del momento angolare . . . . .                                       | 13        |
| 8.2       | Rappresentazioni matriciali del momento angolare . . . . .                   | 14        |
| 8.3       | Armoniche sferiche . . . . .   | 15        |
| 8.4       | Composizione di momenti angolari . . . . .                                   | 17        |
| <b>9</b>  | <b>Atomo di idrogeno</b>   | <b>19</b> |
| <b>10</b> | <b>Teoria delle Perturbazioni</b>  | <b>20</b> |
| 10.1      | Teoria delle Perturbazioni indipendenti dal tempo . . . . .                  | 20        |
| 10.1.1    | Caso non degenere . . . . .  | 20        |
| 10.1.2    | Caso degenere . . . . .  | 20        |

|  |           |
|--|-----------|
| 10.2 Teoria delle Perturbazioni dipendenti dal tempo . . . . . | 22        |
| <b>11 WKB: approssimazione semiclassica</b>                    | <b>23</b> |
| <b>12 Formule</b>  | <b>24</b> |
| 12.1 integrali . . . . .                                       | 24        |
| 12.2 moto del centro di massa e moto relativo . . . . .        | 24        |

# 1 Matrici di Pauli

$\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  oppure  $i = x, y, z$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

autovalori ed autovettori

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} |\pm \vec{n}\rangle = \lambda^{(\pm)} |\pm \vec{n}\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^{(+)} = +1 \\ \lambda^{(-)} = -1 \end{array} \right\} \quad \forall \vec{n}$$

$$|+\vec{n}\rangle = e^{i\alpha_+} \sqrt{\frac{1+n_z}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{n_x+in_y}{1+n_z} \end{pmatrix} = e^{i\alpha_+} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$|-\vec{n}\rangle = e^{i\alpha_-} \sqrt{\frac{1-n_z}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{n_x+in_y}{1-n_z} \end{pmatrix} = e^{i\alpha_-} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{n} = (1, 0, 0) & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x & |+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{n} = (0, 1, 0) & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_y & |+_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |-_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \vec{n} = (0, 0, 1) & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_z & |+_z\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-_z\rangle = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

formalismo di Dirac

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \\ \sigma_y &= -i(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|) \\ \sigma_z &= |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \end{aligned}$$

proprietà

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^\dagger \\ \sigma_i^2 &= \mathbb{I} \\ \text{Tr}(\sigma_i) &= 0 \\ \det(\sigma_i) &= -1 \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}\mathbb{I} \\ \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \vec{a} &= \sum_k a_k \sigma_k \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\end{aligned}$$

operatori di innalzamento e abbassamento

$$\begin{aligned}\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y &= 2|+\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{cases} \sigma_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \sigma_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y &= 2|- \rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{cases} \sigma_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

operatori di proiezione

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{+\vec{n}} &= |+\vec{n}\rangle\langle+\vec{n}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix} \\ \mathbb{P}_{-\vec{n}} &= |-\vec{n}\rangle\langle-\vec{n}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - n_z & -(n_x - in_y) \\ -(n_x + in_y) & 1 + n_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_+ &= \frac{1}{2}(1 + \sigma_z) = |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{cases} \mathbb{P}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{P}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \\ \mathbb{P}_- &= \frac{1}{2}(1 - \sigma_z) = |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{cases} \mathbb{P}_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbb{P}_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}\end{aligned}$$

$\mathbb{I}$ ,  $\vec{\sigma}$  sono una base per le matrici  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_0 \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} a_0 + a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & a_0 - a_z \end{pmatrix}$$

$$H = E_0 \mathbb{I} + \vec{E} \cdot \vec{\sigma} = E_0 \mathbb{I} + |\vec{E}| \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = e^{-iE_0 t/\hbar} e^{-i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \alpha} = e^{-iE_0 t/\hbar} (\mathbb{I} \cos(\alpha) - i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\alpha))$$

dove  $\alpha = |\vec{E}|t/\hbar$ .

## 2 Funzioni di operatori

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} A^n$$

$$f(A) = \oint_{\Gamma \supset \sigma_A} \frac{f(z)}{2\pi i} (z - A)^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_A} f(\lambda) \mathbb{P}_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_A} f(\lambda) |\lambda\rangle\langle\lambda|$$

$$f(A) = X f(A_{diag}) X^{-1}$$

dove  $A = X A_{diag} X^{-1}$ , e  $X$  ha per colonne gli autovettori di  $A$ .  $\sigma_A$  è lo spettro degli autovalori di  $A$ .

$$e^A e^B = \begin{cases} e^{A+B} & \text{solo se } [A, B] = 0 \\ e^{A+B+g(A,B)} & g(A, B) = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] + \dots \end{cases}$$

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad \text{per operatori canonici: } [A, B] \propto \mathbb{I}$$

## 3 Principio di indeterminazione

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \langle C \rangle^2$$

dove:

$$\begin{aligned} [A, B] &= iC \\ A &= A^\dagger, \quad B = B^\dagger, \quad C = C^\dagger \\ (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2 \\ (\Delta B)^2 &= \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \langle \psi | B^2 | \psi \rangle - \langle \psi | B | \psi \rangle^2 \end{aligned}$$

## 4 Equazione di Shroedinger

### 4.1 Equazione d'onda

$$H \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### 4.2 Equazione d'onda stazionaria

per gli stati stazionari

$$\psi(\vec{x}, t) = U(t)\psi(\vec{x}) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{x})$$

$$H \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

### 4.3 Particella libera $D$ -dim

Autofunzioni ed autovalori

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{\hbar^{D/2}} \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{D/2}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\vec{p}^2}{2m\hbar}$$

## 4.4 Particella su un segmento (Buca infinita)

Autofunzioni ed autovalori

$$x \in [0, L] \quad \begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n = 1, 2, 3, \dots \\ E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \end{cases}$$

$$x \in [-L/2, L/2] \quad \begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n = 1, 3, 5, \dots \\ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n = 2, 4, 6, \dots \\ E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \end{cases}$$

## 4.5 Raccordo della funzione d'onda in un punto $x_0$

$$\psi_I(x) = \psi(x \leq x_0) \quad \psi_{II}(x) = \psi(x \geq x_0)$$

energia potenziale non divergente:

$$\begin{cases} \psi_{II}(x_0) = \psi_I(x_0) & \text{continuità della funz. d'onda} \\ \frac{d\psi_{II}}{dx}(x_0) = \frac{d\psi_I}{dx}(x_0) & \text{continuità della derivata} \end{cases}$$

energia potenziale  $V(x) = \pm aV_0\delta(x - x_0)$ :

$$\begin{cases} \psi_{II}(x_0) = \psi_I(x_0) & \text{continuità della funz. d'onda} \\ \frac{d\psi_{II}}{dx}(x_0) = \frac{d\psi_I}{dx}(x_0) \pm \frac{2maV_0}{\hbar^2} \psi(x_0) & \text{discontinuità della derivata} \end{cases}$$

## 4.6 Delta di Dirac

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad x \neq 0 \\ f(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx \end{aligned}$$

è una “funzione” (distribuzione) pari

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

se l'argomento è una funzione  $g(x)$

$$\delta(g(x)) = \sum_{\{x_i\}:g(x_i)=0,g'(x_i)\neq 0} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

rappresentazione integrale:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

## 5 Teorema del viriale

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

$$2\langle\psi|T|\psi\rangle = \langle\psi|\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V|\psi\rangle$$

dove  $T$  = energia cinetica,  $V$  = energia potenziale.

Se  $V$  è a simmetria sferica e proporzionale a  $r^n$ :

$$\begin{aligned} 2\langle\psi|T|\psi\rangle &= n\langle\psi|V|\psi\rangle \\ E &= \langle\psi|T|\psi\rangle + \langle\psi|V|\psi\rangle \\ \begin{cases} \langle\psi|T|\psi\rangle = \frac{n}{n+2}E \\ \langle\psi|V|\psi\rangle = \frac{2}{n+2}E \end{cases} \end{aligned}$$

## 6 Coefficienti di riflessione e trasmissione

La densità di corrente

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi^*\psi)$$

soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \text{ per stati stazionari}$$

$$J = \text{costante per stati stazionari, 1-dim}$$

1-dim: onda piana incidente da  $-\infty$  su una barriera/buca

$$\begin{array}{llll} \psi_I = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix} & \text{stato stazionario asintotico} & \text{prima della} & \text{barriera/buca} \\ \psi_{II} = Ce^{ik_{II}x} & \text{"} & \text{dopo la} & \text{"} \end{array}$$

densità di corrente associate:

$$\begin{aligned} J_I &= J_{\text{Incidente}} + J_{\text{Riflessa}} = \frac{\hbar k_I}{2m}(|A|^2 - |B|^2) \\ J_{II} &= J_{\text{Trasmessa}} = \frac{\hbar k_{II}}{2m}(|C|^2). \end{aligned}$$

coefficienti di riflessione e trasmissione

$$\begin{aligned} R &= \frac{|J_{\text{Riflessa}}|}{|J_{\text{Incidente}}|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \\ T &= \frac{|J_{\text{Trasmessa}}|}{|J_{\text{Incidente}}|} = \frac{|C|^2 k_{II}}{|A|^2 k_I} \\ R + T &= 1 \end{aligned}$$

### 6.1 Matrice di trasmissione e matrice di scattering

$$\begin{array}{llll} \psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{stato stazionario asintotico} & \text{prima della} & \text{barriera/buca} \\ \psi_{II} = Ce^{ikx} + De^{-ikx} & \text{"} & \text{dopo la} & \text{"} \end{array}$$

matrice di trasmissione  $M$ :

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^* & M_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} V(x) = V^*(x) \\ J = \text{costante} \\ V(x) = V(-x) \end{array}$$

$\det M = 1$   
 $M_{12} \in \Im$

matrice di scattering  $S$ :

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{11}^*} \begin{pmatrix} 1 & M_{12} \\ -M_{12}^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$
$$SS^+ = S^+S = 1$$

$$R = \left| \frac{M_{12}}{M_{11}} \right|^2$$
$$T = \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2$$

## 7 Oscillatore armonico 1-dim

### 7.1 Rappresentazione nello spazio delle coordinate

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi$$

Autovalori ed autofunzioni

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \psi_n &= C_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2 \dots \infty$$

dove

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \\ C_n &= \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \\ H_n(\xi) &= (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \\ H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2\xi \\ H_2 &= -2 + 4\xi^2 \\ H_3 &= -12\xi + 8\xi^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Gli autovalori:

hanno uno spettro discreto

sono equidistanti

l'energia dello stato fondamentale è diversa da zero  $E_0 = 1/2\hbar\omega$

Le autofunzioni:

sono reali a meno di un fattore di fase costante

hanno parità definita : sono (dis)pari per  $n$  (dis)pari

$$\psi_n(x) = (-1)^n \psi_n(-x)$$

hanno  $n$  radici reali

## 7.2 Operatori di creazione e distruzione (innalzamento e abbassamento)

$$\frac{H}{\hbar\omega} = a^\dagger a + 1/2$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \end{cases}$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \\ p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}i(a^\dagger - a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \\ a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{cases}$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$$

## 8 Il momento angolare

### 8.1 Algebra del momento angolare

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$
$$[J^2, J_k] = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3$$

$$j = 0, 1, \dots \quad \begin{cases} J^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle \\ -j \leq m \leq j \quad \left\{ \begin{array}{l} J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle \end{array} \right. \end{cases}$$

*operatori a scala, di innalzamento e abbassamento*

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$J_- = J_+^\dagger$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}$$

$$[J^2, J_{\pm}] = 0$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$\{J_+, J_-\} = 2(J^2 - J_z^2)$$

$$J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J_+|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle$$

$$J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$$

## 8.2 Rappresentazioni matriciali del momento angolare

$$\underline{j = 1/2}$$

$$\begin{aligned}
 J^2 &= \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 J_x &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \sigma_x & |+\frac{1}{2}_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & |-\frac{1}{2}_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 J_y &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \sigma_y & |+\frac{1}{2}_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & |-\frac{1}{2}_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\
 J_z &= \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \sigma_z & |+\frac{1}{2}_z\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |-\frac{1}{2}_z\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 J_+ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \sigma_+ = \frac{1}{2}\hbar (\sigma_x + i\sigma_y) \\
 J_- &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar \sigma_- = \frac{1}{2}\hbar (\sigma_x - i\sigma_y)
 \end{aligned}$$

$$\underline{j = 1}$$

$$\begin{aligned}
 J^2 &= 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 J_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & |1_x\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} & |0_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & | -1_x\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 J_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & |1_y\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} & |0_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & | -1_y\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \\
 J_z &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & |1_z\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & |0_z\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & | -1_z\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 J_+ &= \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 J_- &= \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### 8.3 Armoniche sferiche

rappresentazione del momento angolare in termini di operatori differenziali

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = +i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_y &= -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_z &= -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \\ L^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned}$$

autofunzioni di  $L^2$  e  $L_z$

$$l = 0, 1, \dots \quad \begin{cases} L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ -l \leq m \leq l \quad \begin{cases} L_z Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi) \end{cases} \end{cases}$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

rappresentazione esplicita delle armoniche sferiche

$$\begin{aligned} m \geq 0 \quad Y_l^m(\theta, \phi) &= (-1)^m \left( \frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ m < 0 \quad Y_l^m(\theta, \phi) &= Y_l^{-|m|}(\theta, \phi) = (-1)^{|m|} Y_l^{|m|*}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

dove  $P_l^m(u)$  sono le funzioni associate di Legendre, legate ai polinomi di Legendre  $P_l(u)$  tramite:

$$\begin{aligned} P_l^m(u) &= (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \quad 0 \leq m \leq l \\ P_l(u) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} [(u^2-1)^l] \quad \text{formula di Rodriguez} \end{aligned}$$

integrale di normalizzazione

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{mm'}$$

alcune espressioni esplicite (a meno di una fase arbitraria)

$$l = 0 \quad Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$\begin{aligned} l = 1 \quad Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{(x \pm iy)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = 2 \quad Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^2} \\ Y_2^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z}{r} \frac{(x \pm iy)}{r} \\ Y_2^{\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \left( \frac{(x \pm iy)}{r} \right)^2 \end{aligned}$$

⋮

*Teorema di addizione*

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{v}_1) Y_l^{m*}(\hat{v}_2) = \frac{(2l+1)}{4\pi} P_l(\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2)$$

## 8.4 Composizione di momenti angolari

$$\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{J}_2$$

$$j = |j_1 - j_2| \dots j_1 + j_2$$

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$$

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle = \text{coefficienti di Clebsch-Gordan}$$

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle = (-1)^{j-j_1-j_2} \langle j_2 j_1; m_2 m_1 | j_2 j_1; jm\rangle$$

formula di ricorrenza

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm\rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm\rangle \end{aligned}$$

fissati  $j_1 j_2$ :

$$|jm\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle$$

$$|m_1 m_2\rangle = \sum_j \sum_m |jm\rangle \langle jm | m_1 m_2\rangle$$

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle = \langle jm | m_1 m_2\rangle^* = \langle jm | m_1 m_2\rangle \in \text{Re}$$

$$\underline{j_1 \times j_2 = 1/2 \times 1/2}$$

$$|1 \quad 1\rangle = \quad | \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|1 \quad -1\rangle = \quad | -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|1 \quad 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} | \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} | -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|0 \quad 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} | \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} | -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$\underline{j_1 \times j_2 = 1 \times 1/2}$$

$$|\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\rangle = |1 \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1 \quad -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0 \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0 \quad -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |-1 \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2}\rangle = |-1 \quad -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \quad -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0 \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |0 \quad -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |-1 \quad \frac{1}{2}\rangle$$

$$\underline{j_1 \times j_2 = 1 \times 1}$$

$$|2 \quad 2\rangle = |1 \quad 1\rangle$$

$$|2 \quad 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |1 \quad 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |0 \quad 1\rangle$$

$$|2 \quad 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} |1 \quad -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0 \quad 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |-1 \quad 1\rangle$$

$$|2 \quad -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |-1 \quad 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |0 \quad -1\rangle$$

$$|2 \quad -2\rangle = |-1 \quad -1\rangle$$

$$|1 \quad 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |1 \quad 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |0 \quad 1\rangle$$

$$|1 \quad 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |1 \quad -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |-1 \quad 1\rangle$$

$$|1 \quad -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |0 \quad -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |-1 \quad 0\rangle$$

$$|0 \quad 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1 \quad -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0 \quad 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |-1 \quad 1\rangle$$

## 9 Atomo di idrogeno

Autovalori ed autofunzioni

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{r} \right\} \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = E_n \psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

$$\begin{cases} n = 1, \dots, \infty & \left\{ E_n = -\frac{Z^2 e^2}{2n^2 a_0} = -13.6 \text{ eV } Z^2/n^2 \right. \\ l = 0, \dots, n-1 & \left. \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \right\} \end{cases}$$

$$a_0 = \text{raggio di Bohr} = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Autofunzione radiale

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Ze^2}{r} \right\} R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r)$$

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

$$\text{dove } \rho = \frac{2Zr}{na_0}$$

$$N_{nl} = \frac{2Z^{3/2}}{a_0^{3/2} n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}$$

$$L_p^k(u) = \sum_{s=0}^{p-k} (-1)^{s+k} \binom{p}{k+s} \frac{p!}{s!} u^s$$

$$R_{10} = \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} 2 e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20} = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} (2 - Zr/a_0) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21} = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{\sqrt{3}a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

⋮

## 10 Teoria delle Perturbazioni

### 10.1 Teoria delle Perturbazioni indipendenti dal tempo

$$H = H^{(0)} + \lambda V$$

$$H^{(0)}|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$\begin{cases} |n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2|n^{(2)}\rangle + \dots \\ E_n = E_n^{(0)} + \lambda\Delta_n^{(1)} + \lambda^2\Delta_n^{(2)} + \dots \end{cases}$$

#### 10.1.1 Caso non degenere

al primo ordine in  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)} &= \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle \\ |n^{(1)}\rangle &= \sum_{k \neq n} \frac{\langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

al secondo ordine in  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)} &= \langle n^{(0)}|V|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \\ |n^{(2)}\rangle &= \sum_{k \neq n} \sum_{m \neq n} \left[ \frac{\langle k^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \frac{\langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right] |k^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

#### 10.1.2 Caso degenere

degenerazione di ordine  $g$

Si diagonalizza la matrice  $g \times g$  della perturbazione  $V$  (nel sottospazio  $D$  degenere)

$$V_{m'm} = \langle m'^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle$$

$$\sum_{m \in D} V_{m'l} \langle m^{(0)}|l^{(0)}\rangle = \Delta_l^{(1)} \langle m'^{(0)}|l^{(0)}\rangle$$

gli autovalori sono le correzioni dell'energia al prim'ordine;

gli autovettori sono la base imperturbata nello spazio degenere:

$$|l^{(0)}\rangle = \sum_{m \in D} \langle m^{(0)}|l^{(0)}\rangle |m^{(0)}\rangle$$

le correzioni al prim'ordine in  $\lambda$ :

$$|l^{(1)}\rangle = \sum_{k \notin D} \frac{\langle k^{(0)}|V|l^{(0)}\rangle}{E_D^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle$$

Se al prim'ordine (ad un certo ordine) la degenerazione non è rimossa totalmente (due o più autovalori di  $V_{m'm}$  sono uguali) si costruisce la matrice della perturbazione al second'ordine (all'ordine superiore):

$$\langle m'^{(0)}|V|m^{(1)}\rangle = \sum_{k \notin D} \frac{\langle m'^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)}|V|m^{(0)}\rangle}{E_D^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

e i suoi autovettori costituiscono la base imperturbata per il sottospazio ancora degenere.

## 10.2 Teoria delle Perturbazioni dipendenti dal tempo

$$H = H^{(0)} + \lambda V(t)$$

$$H^{(0)}|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = [H^{(0)} + \lambda V(t)]|\psi(t)\rangle$$

$$c_n(t) = \langle n^{(0)}|\psi(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}c_n(t) = E_n^{(0)}c_n(t) + \lambda \sum_k V_{n,k}(t) c_k(t)$$

$$c_n(t) = a_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}a_n(t) = \lambda \sum_k e^{i\omega_{n,k}t} V_{n,k}(t) a_k(t)$$

$$\begin{cases} V_{n,k}(t) = \langle n^{(0)}|V(t)|k^{(0)}\rangle \\ \omega_{n,k}(t) = (E_n^{(0)} - E_k^{(0)})/\hbar \end{cases}$$

$$a_n(t) = a_n^{(0)}(t) + \lambda a_n^{(1)}(t) + \lambda^2 a_n^{(2)}(t) + \dots$$

$$a_n(t=0) = a_n^{(0)} = \delta_{n,i}$$

$$a_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{n,i}\tau} V_{n,i}(\tau) d\tau$$

Probabilità di transizione dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f \neq i$ :

$$P_{i \rightarrow f}(t) = |c_f(t)|^2 \simeq |\lambda a_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_{f,i}\tau} V_{f,i}(\tau) d\tau \right|^2$$

Probabilità di transizione per una perturbazione costante:

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{\lambda^2}{\hbar^2} |V_{f,i}|^2 \frac{4}{\omega_{f,i}^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{f,i}t}{2}\right)$$

Probabilità di permanenza nello stato iniziale  $i$ :

$$P_{i \rightarrow i}(t) = 1 - \sum_f P_{i \rightarrow f}(t)$$

## 11 WKB: approssimazione semiclassica

formule di raccordo

$$\frac{1}{\sqrt{\beta(E,x)}} e^{-|\int_x^{x^*(E)} \frac{\beta(E,x')}{\hbar} dx'|} \leftrightarrow \frac{+2}{\sqrt{p(E,x)}} \cos \left( \left| \int_x^{x^*(E)} \frac{p(E,x')}{\hbar} dx' \right| - \pi/4 \right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{\beta(E,x)}} e^{+|\int_x^{x^*(E)} \frac{\beta(E,x')}{\hbar} dx'|} \leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{p(E,x)}} \sin \left( \left| \int_x^{x^*(E)} \frac{p(E,x')}{\hbar} dx' \right| - \pi/4 \right)$$

dove

$$p(E,x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$$
$$\beta(E,x) = \sqrt{2m(V(x) - E)}$$

Condizione di Bohr–Sommerfeld

$$\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} p(E,x') dx' = \pi \hbar (n + 1/2)$$

Densità dei livelli energetici

$$\frac{dn}{dE} = \frac{m}{\pi \hbar} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx'}{p(E,x')}$$

Coefficiente di trasmissione

$$T \simeq e^{-2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\beta(E,x')}{\hbar} dx'}$$

## 12 Formule

### 12.1 integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^m \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^m} \frac{(2m-1)!!}{2^m} \quad m > 0$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-\alpha x} dx = (-1)^m \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{m!}{\alpha^{m+1}} \quad m \geq 0$$

### 12.2 moto del centro di massa e moto relativo

L'hamiltoniano che descrive un sistema a due particelle di massa  $m_1, m_2$  e di coordinate  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e momenti coniugati  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

diventa

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_G^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(|\vec{r}|)$$

effettuando il cambiamento di variabili

|   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| $\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ | la coordinata del centro di massa |
| $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$                             | la coordinata del moto relativo   |
| $\vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$                           | il momento del centro di massa    |
| $\vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$   | il momento del moto relativo      |
| $m = m_1 + m_2$   | la massa totale                   |
| $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$                             | la massa ridotta                  |